Taylor 展開覚書 (2)

逐次近似法の解としての Taylor 展開

積分方程式

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^h f'(x+t)\,dt$$

の第 0 近似を $f_0(x,\ h) = f(x)$ とおいて関数列 $f_1(x,\ h),\ f_2(x,\ h),\ \cdots,\ f_n(x,\ h),\ \cdots$ を

$$f_n(x,\ h) = f(x) + \int_0^h f'_{n-1}(x,\ t)\,dt$$

からつくると、次のようになる。ただし、微分記号 (') は、x についての微分を表すものとする。

$$\begin{aligned}
f_0(x,\ h) &= f(x) \\
\\
f_1(x,\ h) &= f(x) + \int_0^h f'_0(x,\ t)\,dt = f(x) + \int_0^h f'(x)\,dt \\
&= f(x) + hf'(x) \\
\\
f_2(x,\ h) &= f(x) + \int_0^h f'_1(x,\ t)\,dt = f(x) + \int_0^h \big(f'(x) + tf''(x)\big)\,dt \\
&= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) \\
\\
f_3(x,\ h) &= f(x) + \int_0^h f'_2(x,\ t)\,dt = f(x) + \int_0^h \Big(f'(x) + tf''(x) + \frac{t^2}{2!}f'''(x)\Big)\,dt \\
&= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) \\
\\
&\ \ \vdots \\
\\
f_n(x,\ h) &= f(x) + \int_0^h f'_{n-1}(x,\ t)\,dt \\
&= f(x) + \int_0^h \Big(f'(x) + tf''(x) + \frac{t^2}{2!}f'''(x) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\Big)\,dt \\
&= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) \\
\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$