定理 (Weierstrass)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)\quad\left(ただし、0<a<1,\ b\,奇数,\ ab>1+\frac{3}{2}\pi\right)$$

とおくと、$f(x)$ は到る処連続で、到る処微分できない。

<u>Proof</u>

$|a^n\cos(b^n\pi x)|\leqq a^n$ かつ $0<a<1$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n$$

は一様収束。

よって、Weierstrass の定理より、

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

は一様収束。各項は、continuous function であることは明らか。

よって、$f(x)$ は continuous。

1st step

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{h}a^n\left[\cos b^n\pi(x+h)-\cos b^n\pi x\right]\\
&=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{h}a^n[\cos b^n\pi(x+h)-\cos b^n\pi x]+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{h}a^n[\cos b^n\pi(x+h)-\cos b^n\pi x]\\
&=s_m+r_m
\end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
|s_m| &= \left|\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{h}a^n[\cos b^n\pi(x+h)-\cos b^n\pi x]\right|\\
&= \left|-\sum_{n=0}^{m-1}\frac{2}{h}a^n\sin\frac{b^n\pi(2x+h)}{2}\sin\frac{b^n\pi h}{2}\right|\\
&\leqq \sum_{n=0}^{m-1}\left|(ab)^n\pi\frac{\sin b^n\pi(x+\frac{h}{2})\sin\frac{b^n\pi h}{2}}{\frac{1}{2}b^n\pi h}\right|\\
&\leqq \pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n\\
&= \pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1}<\frac{\pi(ab)^m}{ab-1}
\end{aligned}$$

よって、$\exists\epsilon:|\epsilon|<1,\ s_m=\dfrac{\pi(ab)^m\epsilon}{ab-1}$

2nd step

$b^m x$ に最も近い integer を k_m とし、$b^m x = k_m + \rho_m$ とおくと、$|\rho_m| \leqq \dfrac{1}{2}$

$\xi_m = (k_m+1)b^{-m},\ \eta_m = (k_m-1)b^{-m}$ とおくと、

$$\eta_m < x < \xi_m$$

$m \to \infty$ なるとき、$\xi_m,\ \eta_m \to x$.

いま、特に h を、$x+h=\xi_m$ なる如くとると、

$$h = \xi_m - x = (k_m+1)b^{-m} - x = b^{-m}(k_m + 1 - b^m x) = (1-\rho_m)b^{-m} \leqq \frac{3}{2}b^{-m}$$

$n \geqq m$ のとき、

$$\begin{aligned}
\cos b^n \pi(x+h) &= \cos b^n \pi \xi_m = \cos(b^{n-m}\pi(1+k_m)) = (-1)^{1+k_m} \quad (\because b\text{ 奇数}) \\
\cos b^n \pi x &= \cos\left(b^{n-m}\pi(k_m+\rho_m)\right) = \cos\left(b^{n-m}\pi k_m + b^{n-m}\pi\rho_m\right) \\
&= (-1)^{k_m}\cos\left(b^{n-m}\pi\rho_m\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad r_m = (-1)^{1+k_m}\frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} a^n \left(1 + \cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\right)$$

ここで、$1+\cos(\pi\rho_m) \geqq 1,\ 1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m) \geqq 0$ for $n > m$ だから、

$$(-1)^{1+k_m} r_m \geqq \frac{1}{h}a^m \geqq \frac{2}{3}(ab)^m \ \left(\text{Note that} \ \ h \leqq \frac{3}{2}b^{-m}\right)$$

$$\therefore \quad \exists\theta > 1;\ r_m = (-1)^{1+k_m}\frac{2}{3}(ab)^m\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left\{f(\xi_m) - f(x)\right\} &= s_m + r_m \\
&= (-1)^{1+k_m}\frac{2}{3}\theta(ab)^m + \epsilon\pi\frac{(ab)^m}{ab-1} \\
&= (-1)^{1+k_m}(ab)^m\left\{\frac{2}{3}\theta + (-1)^{1+k_m}\frac{\pi\epsilon}{ab-1}\right\}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{2}{3}\theta + (-1)^{1+k_m}\frac{\pi\epsilon}{ab-1} > \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}$$

ところが、$ab - 1 > \dfrac{3}{2}\pi$.　$\therefore \quad \dfrac{2}{3} > \dfrac{\pi}{ab-1}$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}\theta + (-1)^{1+k_m}\frac{\pi\epsilon}{ab-1} > 0$$

次に、$\dfrac{1}{h}\left\{f(\eta_m)-f(x)\right\}$ の振る舞いを調べる。
$x+h=\eta_m=(k_m-1)b^{-m}$ とおくと、$b^m x=k_m+\rho_m$ だから、

$$h=-(1+\rho_m)b^{-m} \quad \therefore \quad |h| \leqq \frac{3}{2}b^{-m}$$

$$\begin{aligned}
\cos(b^n\pi\eta_m) &= \cos\Big(b^n\pi(k_m-1)b^{-m}\Big)=\cos\Big(b^{n-m}\pi(k_m-1)\Big)=(-1)^{k_m-1} \quad (\because b \text{ 奇数}) \\
\cos(b^n\pi x) &= \cos\Big(b^n\pi(k_m+\rho_m)b^{-m}\Big)=\cos\Big(b^{n-m}\pi(k_m+\rho_m)\Big) \\
&= \cos(b^{n-m}\pi k_m)\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)=(-1)^{k_m}\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{h}\left\{f(\eta_m)-f(x)\right\}=(-1)^{k_m-1}\frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty}a^n\Big(1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\Big)+\frac{\pi\epsilon(ab)^m}{ab-1} \quad (|\epsilon|<1)$$

ところが、
$1+\cos(\pi\rho_m)\geqq 1,\quad 1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\geqq 0 \text{ for } n>m$

$$\therefore \quad \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty}a^n\Big(1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\Big)\geqq\frac{1}{h}a^m \geqq \frac{2}{3}(ab)^m$$

なので、

$$\exists\theta'>1,\quad \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty}a^n\Big(1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\Big)=\frac{2}{3}(ab)^m\theta'$$

$$\therefore \quad \frac{1}{h}\left\{f(\eta_m)-f(x)\right\}=(-1)^{k_m-1}(ab)^m\left\{\frac{2}{3}\theta'+(-1)^{k_m-1}\frac{\pi\epsilon}{ab-1}\right\}$$

ここで、

$$\frac{2}{3}\theta'+(-1)^{k_m-1}\frac{\pi\epsilon}{ab-1}>\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}>0 \quad \left(\because \quad ab>1+\frac{3}{2}\pi\right)$$

$ab>1$ なので、$m\to\infty$ のとき $(ab)^m\to\infty$. このとき、$\dfrac{1}{h}\left\{f(\xi_m)-f(x)\right\}$ も $\dfrac{1}{h}\left\{f(\eta_m)-f(x)\right\}$ も発散するので、$f'(x)$ は存在しない。