スターリングの公式 (Stirling's formula)

整数 n の階乗は、ガンマ関数を用いて表される。

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \tag{1}$$

ここで、n が十分に大きい場合に、被積分関数

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

は、図 1 の濃い実線で示したように釣鐘の形をしている。そこで、この関数をガウ

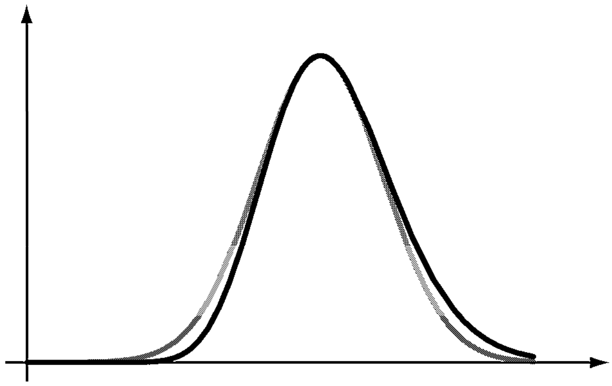

図 1: $f(x) = x^n e^{-x}$(濃い実線) とそのガウス関数による近似 (薄い実線)

ス関数 $(e^{-a(x-m)^2})$ で近似しよう。そのためには、まず、$f(x)$ を $e^{G(x)}$ の形に表す。x は、$e^{\ln x}$ とも表されるので、

$$x^n e^{-x} = e^{n\ln x - x} \equiv e^{G(x)}$$

ここで、

$$\begin{aligned} G(x) &= n\ln x - x \\ G'(x) &= \frac{n}{x} - 1 \\ G''(x) &= -\frac{n}{x^2} \end{aligned}$$

である。そこで、$G(x)$ が極大値となる $x = n$ のまわりで展開しよう。

$$\begin{aligned} G(x) &\simeq G(n) + \frac{G''(n)}{2}(x-n)^2 \\ &\simeq n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 \end{aligned}$$

これを、(1) 式に代入し、積分領域を $(-\infty,\ +\infty)$ とすると、

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &\simeq e^{n\ln n - n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-n)^2/2n}\,dx \\ &\simeq \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}\end{aligned}$$

となる。ここで、$e^{n\ln n} = n^n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-n)^2/2n}\,dx = \sqrt{2\pi n}$ を用いた。ガンマ関数を階乗で表して、スターリングの公式

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$$

を得る。