π の級数展開

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

の両辺を x で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^x dx(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\end{aligned}$$

一方、$\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ は、$x = \tan t$ と置くと、

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos^2 t, \qquad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

だから、

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\arctan x} dt = \arctan x$$

となるので、結局、

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

を得る。この関係式を Machin の公式に適用すると、

$$\begin{aligned}\pi &= 16 \arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239} \\ &= 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \cdots\right) \\ &= 16\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)\cdot 5^{2k+1}} - 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)\cdot 239^{2k+1}}\end{aligned}$$

が得られる。