円周率は 3.05 より大きいことを証明せよ。

【証明】

マチン (Machin) の公式より、

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta, \quad ここで、\tan\alpha = \frac{1}{5}, \quad \tan\beta = \frac{1}{239}$$

$\tan\alpha = \frac{1}{5}$ の両辺を 2 乗して、

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{25}, \quad \therefore \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

ゆえに、

$$\alpha > \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} > \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9} > \frac{1.732}{9} > 0.192$$

一方、

$$\beta < \tan\beta = \frac{1}{239} < \frac{1}{200} = 0.005$$

以上の関係式より、$\frac{\pi}{4} > 4\times 0.192 - 0.005$、すなわち、

$$\pi > 3.052$$

を得る。

[註]

$$4\,(4\sin\alpha - \tan\beta) < \pi < 4\,(4\tan\alpha - \sin\beta)$$

ところで、

$$4\,(4\sin\alpha - \tan\beta) = 4\left(\frac{4}{\sqrt{26}} - \frac{1}{239}\right) = 3.121\cdots,\ 4\,(4\tan\alpha - \sin\beta) = 4\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{239^2+1}}\right) = 3.183\cdots$$

だから、

$$3.12 < \pi < 3.19$$

上限値と下限値の平均値を取ると、$\pi \simeq 3.15$ と結構良い値が出る。

【別解】(オーソドックスな方法)

角の大きさを表すのに弧度法を用いることにする。$\theta > 0$ とすると、定義より、

$$\theta > \sin\theta, \qquad 更に、\qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

なので、θ が小さいほど、$\sin\theta$ との一致は良くなる。そこで、$\theta = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$ を代入する。1 つの角が 15° の直角三角形の 3 辺の比は下図のようになるので、

$$\frac{\pi}{12} > \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

ゆえに、

$$\pi > 3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) > 3\times 1.41\times(1.732-1) > 3.096 > 3.05$$

[註] $\sin\theta < \theta < \tan\theta\ (0<\theta<\pi/2)$ に $\theta = \frac{\pi}{12}$ を代入して、整理すると、

$$3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) < \pi < 12(2-\sqrt{3})$$

$\sqrt{2} = 1.414\cdots,\ \sqrt{3} = 1.732\cdots$ を代入して計算すると、

$$3.10 < \pi < 3.22$$

を得る。上限値と下限値の平均を取ると、$\pi \simeq 3.16$ となる。