

レスリー行列 Leslie Matrix

緑川章一*

1 Leslie Matrix

時刻 t における i 年齢の人口を $n_i(t)$ で表すことにすると、時刻 t での年齢別人口は、ベクトル

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix}$$

で表すことができる。ここで、 m は最高年齢を表し、

$$k \geq m + 1 \text{ では、} n_k(t) = 0$$

とする。

時刻 t における i 年齢人口の時刻 $t + 1$ に置ける生残率を s_i と置くと、

$$n_{i+1}(t+1) = s_i n_i(t) \quad (1 \leq i \leq m-1)$$

$n_1(t+1)$ は、各年齢の人口 $n_i(t)$ に出生率 β_i を掛けたものを足し上げて得られるので、

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_m(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i n_i(t) \\ s_1 n_1(t) \\ s_2 n_2(t) \\ \vdots \\ s_{m-1} n_{m-1}(t) \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

をレスリー行列 (Leslie matrix) と呼ぶ。この L の固有ベクトルを \mathbf{v} 、固有値を λ と書こう。すなわち、

$$L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

*Shoichi Midorikawa

が成り立つ。

固有値 λ は、 L の特性方程式

$$|L - \lambda I| = 0 \quad (2)$$

の解である。この行列式を計算しよう。 $A = L - \lambda I$ とおき、 $\det A$ を第 1 行に関する余因子展開をおこなう。

$$\det A = \begin{vmatrix} \beta_1 - \lambda & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$= (\beta_1 - \lambda)A_{1,1} + \beta_2 A_{1,2} + \beta_3 A_{1,3} + \cdots + \beta_m A_{1,m} \quad (4)$$

ここで、

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{m-1}$$

$$A_{1,2} = - \begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} = -s_1(-\lambda)^{m-2}$$

$$A_{1,3} = (-1)^2 \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^2 s_1 s_2 (-\lambda)^{m-3}$$

$$\vdots$$

$$A_{1,m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} s_1 s_2 \cdots s_{m-1}$$

そこで、(2) 式は、

$$\beta_1 \lambda^{m-1} + \beta_2 s_1 \lambda^{m-2} + \beta_3 s_1 s_2 \lambda^{m-3} + \cdots + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} - \lambda^m = 0$$

となる。これを書き直すと、

$$\beta_1 \lambda^{-1} + \beta_2 s_1 \lambda^{-2} + \beta_3 s_1 s_2 \lambda^{-3} + \cdots + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \lambda^{-m} = 1 \quad (5)$$

さらに、

$$\ell_1 = 1, \ell_2 = s_1, \ell_3 = s_1 s_2, \ell_4 = s_1 s_2 s_3, \dots, \ell_m = s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \quad (6)$$

と書くことにすると、

$$\lambda^{-1} \beta_1 \ell_1 + \lambda^{-2} \beta_2 \ell_2 + \lambda^{-3} \beta_3 \ell_3 + \cdots + \lambda^{-m} \beta_m \ell_m = 1$$

を得る。和の記号を用いて表すと、

$$\sum_{i=1}^m \lambda^{-i} \beta_i \ell_i = 1$$

となる。これは、ロトカ・オイラー方程式 (Lotka-Euler equation)

$$\int_0^{\infty} e^{-ra} \beta(a) \ell(a) da = 1$$

において、 $e^{-r} = \lambda$ において、離散化したものである。

固有ベクトル \boldsymbol{v} を

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

と書こう。すると、(1) 式は、

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i v_i \\ s_1 v_1 \\ s_2 v_2 \\ \vdots \\ s_{m-1} v_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_m \end{pmatrix}$$

ゆえに、以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^m \beta_i v_i = \lambda v_1, \quad (7)$$

$$s_1 v_1 = \lambda v_2, \quad (8)$$

$$s_2 v_2 = \lambda v_3, \quad (9)$$

\vdots

$$s_{m-1} v_{m-1} = \lambda v_m \quad (10)$$

これらの関係式を用いて、 v_i ($i = 2, 3, \dots, m$) を λ と s_i を用いて表すことができる。

$$v_2 = \lambda^{-1} v_1 s_1$$

$$v_3 = \lambda^{-1} s_2 v_2 = \lambda^{-2} v_1 s_1 s_2$$

\vdots

$$v_m = \lambda^{-1} s_{m-1} v_{m-1} = \lambda^{-(m-1)} v_1 s_1 \cdots s_{m-1}$$

これらの関係式を用いると、(7) 式左辺は、

$$\sum_{i=1}^m \beta_i v_i = \lambda v_1 (\lambda^{-1} \beta_1 + \lambda^{-2} \beta_2 s_1 + \lambda^{-3} \beta_3 s_1 s_2 + \cdots + \lambda^{-m} \beta_m s_0 s_1 \cdots s_{m-1}) \quad (11)$$

$$= \lambda v_1 (\lambda^{-1} \beta_1 \ell_1 + \lambda^{-2} \beta_2 \ell_2 + \lambda^{-3} \beta_3 \ell_3 + \cdots + \lambda^{-m} \beta_m \ell_m) \quad (12)$$

ところが、上式右辺のカッコ内 (\cdots) は、(5) 式より 1 となるので、

$$\sum_{i=1}^m \beta_i v_i = \lambda v_1$$

すなわち、(7) 式は、(8) 式から (10) 式を用いて導かれることが分かった。

そこで、固有ベクトルは、 $v_1 = 1$ と選ぶことにすると、

$$\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{-1} s_1 \\ \lambda^{-2} s_1 s_2 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-1)} s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \lambda^{-1} \ell_2 \\ \lambda^{-2} \ell_3 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-1)} \ell_m \end{pmatrix} \quad (13)$$

この時、

$$\mathbf{v}(1) = L\mathbf{v}(0) = \lambda \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ s_1 \\ \lambda^{-1} s_1 s_2 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)} s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \ell_1 \\ \ell_2 \\ \lambda^{-1} \ell_3 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)} \ell_m \end{pmatrix} \quad (14)$$

基本再生産数 R_0 は、

$$R_0 = (-1)^{m-1} (|L - I| + 1)$$

または、

$$L' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} \det L' &= \beta_1 + \beta_2 s_1 + \beta_3 s_1 s_2 + \cdots + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \\ &= \beta_1 \ell_1 + \beta_2 \ell_2 + \beta_3 \ell_3 + \cdots + \beta_m \ell_m \\ &= R_0 \end{aligned}$$

で与えられる。

2 一般化

時刻 t における人口を年齢別に分類するとき、一般に最高年齢は不定である。その場合、ある年齢以上を一纏めにして考えるのが便利である。

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix}$$

において $n_m(t)$ は、 m 年齢以上の人数とする。すなわち、時刻 t における i 年齢人口の時刻 $t+1$ に置ける生残率を s_i と置くと、

$$n_{i+1}(t+1) = s_i n_i(t) \quad (1 \leq i \leq m-2)$$

ただし、

$$n_m(t+1) = s_{m-1} n_{m-1}(t) + s_m n_m(t)$$

とする。

$n_1(t+1)$ は、各年齢の人口 $n_i(t)$ に出生率 β_i を掛けたものを足し上げて得られるので、

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_m(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i n_i(t) \\ s_1 n_1(t) \\ s_2 n_2(t) \\ \vdots \\ s_{m-1} n_{m-1}(t) + s_m n_m(t) \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$L_G = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m \end{pmatrix}$$

を一般化されたレスリー行列 (Leslie matrix) と呼ぼう。この L の固有ベクトルを \mathbf{v} 、固有値を λ と書こう。すなわち、

$$L_G \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \tag{16}$$

が成り立つ。

特性方程式は、

$$\left| L_G - \lambda I \right| = 0 \tag{17}$$

である。

この行列式を計算しよう。 $A_G = L_G - \lambda I$ とおき、 $\det A_G$ を第1行に関する余因子展開をおこなう。

$$\det A_G = \begin{vmatrix} \beta_1 - \lambda & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m - \lambda \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$= (\beta_1 - \lambda)A_{1,1} + \beta_2 A_{1,2} + \beta_3 A_{1,3} + \cdots + \beta_m A_{1,m} \quad (19)$$

ここで、

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{m-2}(s_m - \lambda)$$

$$A_{1,2} = - \begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m - \lambda \end{vmatrix} = -s_1(-\lambda)^{m-3}(s_m - \lambda)$$

$$A_{1,3} = (-1)^2 \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^2 s_1 s_2 (-\lambda)^{m-4}(s_m - \lambda)$$

$$\vdots$$

$$A_{1,m-1} = (-1)^{m-2} \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_m - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^{m-2} s_1 s_2 \cdots s_{m-2} (s_m - \lambda)$$

$$A_{1,m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} s_1 s_2 \cdots s_{m-1}$$

そこで、(17) 式は、

$$\begin{aligned} & \{(\beta_1 - \lambda)\lambda^{m-2} + \beta_2 s_1 \lambda^{m-3} + \beta_3 s_1 s_2 \lambda^{m-4} + \cdots + \beta_{m-1} s_1 s_2 \cdots s_{m-2}\} (\lambda - s_m) \\ & + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

または、

$$\begin{aligned} & \{\beta_1\lambda^{m-1} + \beta_2s_1\lambda^{m-2} + \beta_3s_1s_2\lambda^{m-3} + \cdots + \beta_{m-1}s_1s_2\cdots s_{m-2} - \lambda^m\} \left(1 - \frac{s_m}{\lambda}\right) \\ & + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

となる。さらに、両辺を λ^m で割って、(6) 式を用いて l_i を使って書き直す。

$$\lambda^{-1}\beta_1l_1 + \lambda^{-2}\beta_2l_2 + \lambda^{-3}\beta_3l_3 + \cdots + \lambda^{-m+1}\beta_{m-1}l_{m-1} - 1 = -\frac{\beta_m l_m}{\lambda^{m-1}(\lambda - s_m)} \quad (22)$$

または、

$$\lambda^{-1}\beta_1l_1 + \lambda^{-2}\beta_2l_2 + \lambda^{-3}\beta_3l_3 + \cdots + \lambda^{-m+1}\beta_{m-1}l_{m-1} + \lambda^{-m}\beta_m l_m - 1 = -\frac{\beta_m l_{m+1}}{\lambda^m(\lambda - s_m)} \quad (23)$$

を得る。和の記号を用いて表すと、

$$\sum_{i=1}^m \lambda^{-i}\beta_i l_i - 1 = -\frac{\beta_m l_{m+1}}{\lambda^m(\lambda - s_m)}$$

となる。これを、

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-i}\beta_i l_i - 1 = 0$$

と比較して、

$$\frac{\beta_m l_{m+1}}{\lambda^m(\lambda - s_m)} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda^{-i}\beta_i l_i$$

を得る。

固有ベクトル \boldsymbol{v} を

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

と書こう。すると、(16) 式は、

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i v_i \\ s_1 v_1 \\ s_2 v_2 \\ \vdots \\ s_{m-2} v_{m-2} \\ s_{m-1} v_{m-1} + s_m v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_{m-1} \\ \lambda v_m \end{pmatrix}$$

ゆえに、以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^m \beta_i v_i = \lambda v_1, \quad (24)$$

$$s_1 v_1 = \lambda v_2, \quad (25)$$

$$s_2 v_2 = \lambda v_3, \quad (26)$$

⋮

$$s_{m-2} v_{m-2} = \lambda v_{m-1} \quad (27)$$

$$s_{m-1} v_{m-1} = (\lambda - s_m) v_m \quad (28)$$

これらの関係式を用いて、 v_i ($i = 2, 3, \dots, m$) を λ と s_i を用いて表すことができる。

$$v_2 = \lambda^{-1} v_1 s_1$$

$$v_3 = \lambda^{-2} v_1 s_1 s_2$$

⋮

$$v_{m-1} = \lambda^{-(m-2)} v_1 s_1 s_2 \cdots s_{m-2}$$

$$v_m = (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-2)} v_1 s_1 s_2 \cdots s_{m-2} s_{m-1}$$

これらの関係式を用いると、(24) 式左辺は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \beta_i v_i &= \lambda v_1 \left(\lambda^{-1} \beta_1 + \lambda^{-2} \beta_2 s_1 + \lambda^{-3} \beta_3 s_1 s_2 + \cdots + \lambda^{-(m-1)} \beta_{m-1} s_0 s_1 \cdots s_{m-2} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-1)} \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-2} s_{m-1} \right) \\ &= \lambda v_1 \left(\lambda^{-1} \beta_1 \ell_1 + \lambda^{-2} \beta_2 \ell_2 + \lambda^{-3} \beta_3 \ell_3 + \cdots + \lambda^{-m+1} \beta_{m-1} \ell_{m-1} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-1)} \beta_m \ell_m \right) \\ &= \lambda v_1 \left(\lambda^{-1} \beta_1 \ell_1 + \lambda^{-2} \beta_2 \ell_2 + \lambda^{-3} \beta_3 \ell_3 + \cdots + \lambda^{-m+1} \beta_{m-1} \ell_{m-1} + \lambda^{-m} \beta_m \ell_m \right. \\ &\quad \left. + (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-m} \beta_m \ell_{m+1} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

ところが、上式右辺のカッコ内 (\dots) は、(22) 式より 1 となるので、

$$\sum_{i=1}^m \beta_i v_i = \lambda v_1$$

すなわち、(24) 式は、(25) 式から (28) 式を用いて導かれることが分かった。

そこで、固有ベクトルは、 $v_1 = 1$ と選ぶことにすると、

$$\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{-1} s_1 \\ \lambda^{-2} s_1 s_2 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)} s_1 s_2 \cdots s_{m-2} \\ (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-2)} s_1 s_2 \cdots s_{m-2} s_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \lambda^{-1} \ell_2 \\ \lambda^{-2} \ell_3 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)} \ell_{m-1} \\ (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-2)} \ell_m \end{pmatrix} \quad (30)$$

となる。

基本再生産数 R_0 は、

$$\det(L_G - I) = (-1)^{m-1}(1 - s_m) \left\{ \sum_{i=1}^m \beta_m \ell_m + \frac{\beta_m \ell_{m+1}}{1 - s_m} - 1 \right\}$$

より、

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{i=1}^m \beta_m \ell_m + \frac{\beta_m \ell_{m+1}}{1 - s_m} \\ &= (-1)^{m-1} \frac{\det(L_G - I)}{1 - s_m} + 1 \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$\frac{\beta_m \ell_{m+1}}{1 - s_m} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \beta_m \ell_m$$

である。

3 フィボナッチのうさぎ (Fibonacci's Rabbits)

問題

新しく生まれたひとつがいのウサギが野原に放たれた。つがいはひと月で成熟し、2か月後には新たにひとつがいのウサギを生む。ウサギが死ぬことは無く、生後2か月からは毎月ひとつがいのウサギを産むとすると、1年後のつがいの数はいくらか？

t ヶ月後に生まれたつがいの数を $n_1(t)$ 、生まれてからひと月以上経過したつがいの数を $n_2(t)$ とおき、

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix}$$

と書くと、

$$n_1(t+1) = n_2(t) \tag{31}$$

$$n_2(t+1) = n_1(t) + n_2(t) \tag{32}$$

となり、レスリー行列は 2×2 の行列となる。拡張されたレスリーのパラメータは、

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 1, s_1 = 1, s_2 = 1$$

で与えられ、

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix}$$

または、

$$\mathbf{u}(t+1) = L\mathbf{u}(t) \tag{33}$$

と書ける。レスリー行列は、

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

初期状態を

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

と定め、(33)式を繰り返し用いると、 $u(t)$ の系列、

$$\mathbf{u}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

が得られる。

特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

となり、固有値と固有ベクトルは、

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \mathbf{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix} \tag{35}$$

で与えられる。

初期状態(34)を固有ベクトル(35)を用いて表すと、

$$\mathbf{u}(0) = -\frac{\lambda_-}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_+ + \frac{\lambda_+}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_-$$

となる。そして、 n ヶ月後の状態は、

$$\mathbf{u}(n) = L^n \mathbf{u}(0) \tag{36}$$

$$= -\frac{\lambda_- \lambda_+^n}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_+ + \frac{\lambda_+ \lambda_-^n}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_- \tag{37}$$

$$= \frac{\lambda_+^{n-1}}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_+ - \frac{\lambda_-^{n-1}}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_- \tag{38}$$

となる。

ここで、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

を定義する。すると、 n ヶ月後のつがいの総数は、

$$N(n) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}(n) \tag{40}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \{ \lambda_+^{n-1}(1 + \lambda_+) - \lambda_-^{n-1}(1 + \lambda_-) \} \tag{41}$$

ここで、 $1 + \lambda_{\pm} = \lambda_{\pm}^2$ を用いると、

$$N(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1})$$

を得る。

1年後のつがいの総数は、 $N = 12$ とにおいて求まるので、フィボナッチパズルの答は、

$$N(12) = 233 \text{ つがい}$$

である。

4 塵劫記のねずみ

問題

正月にねずみの父と母がいて、子を12匹産み、1月末には親と子を合わせて14ひきになる。子ねずみは6組の夫婦となり、それぞれが12匹ずつ産む。親もまた12匹を産むので、2月末には、親と子を合わせて98匹になる。このように月に1度ずつ、親も子も、孫もひ孫も月々に12匹ずつ産むとき、12月のおわりにはねずみの総数は何ひきになるか。

解答

$u_1(t)$: その月 (t) に生まれたつがいの数

$u_2(t)$: その月 (t) より前に生まれたつがいの数

と定義して、

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

とおく。

$$u_1(t+1) = 6u_1(t) + 6u_2(t)$$

$$u_2(t+1) = u_1(t) + u_2(t)$$

となるので、レスリー行列 (Leslie-like Matrix) は、

$$L = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

正月には、1つがいのネズミなので、

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ひと月毎のネズミの状態は、

$$\mathbf{u}(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(2) = \begin{pmatrix} 42 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(3) = \begin{pmatrix} 294 \\ 49 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

特性方程式とその解は、

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda = 0 \quad \therefore \lambda = 0, 7$$

である。

固有値と固有ベクトルは、

固有値	固有ベクトル
$\lambda = 0$	$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\lambda = 7$	$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u}(0)$ を固有ベクトルで表すと、

$$\mathbf{u}(0) = -\frac{6}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{7}\mathbf{v}_2$$

となるので、12 月末には、

$$\mathbf{u}(12) = L^{12}\mathbf{u}(0) = 7^{11}\mathbf{v}_2$$

となる。ゆえに、12 か月後のつがいの数 $N(12)$ は (39) 式の \mathbf{a} をもちいて、

$$N(12) = 7^{11}\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_2 = 7^{12} = 13,841,287,201$$

と表される。ネズミの総数は、この数を 2 倍して、

$$2 \times 7^{12} = 27,682,574,402$$

となる。