デルタ関数 (The Delta Function)

1　定義

ディラックのデルタ関数は、次の式によって定義される。

$$\delta(x-a) = \begin{cases} +\infty & (x = a \text{ のとき}) \\ 0 & (x \neq a \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,dx = 1 \tag{2}$$

以上のことより、デルタ関数は、次の性質を持つ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)\,dx = f(a) \tag{3}$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{4}$$

また、

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{5}$$

が成り立つ。なぜなら、
$a > 0$ のとき、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)f(y/a)\,dy = \frac{1}{a}f(0)$$

$a < 0$ のとき、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)f(x)\,dx = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)f(y/a)\,dy = -\frac{1}{a}f(0)$$

だからである。
更に一般化した

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(\alpha_i)|}\delta(x-\alpha_i) \tag{6}$$

が成り立つ。ここで、α_i は、$\varphi(x) = 0$ の解である。なぜなら、$\varphi(x)$ を α_i のまわりで Taylor 展開すると、

$$\varphi(x) = \varphi'(\alpha_i)(x-\alpha_i) + \cdots$$

となるからである。

2　フーリエ変換

フーリエ変換は、次のように定義される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx}\, dk \tag{7}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \tag{8}$$

(8) 式の積分変数 x を x' と書き換えて、(7) 式に代入すると、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}\, dk$$

となる。ゆえに、

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}\, dk \tag{9}$$

が成り立つ。

3　シフトされたデルタ関数の和 (Sum of Shifted Delta Function)

次のようなシフトされたデルタ関数の和について考える。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n) \tag{10}$$

$f(t)$ は周期 2π の関数なので、以下のような Fourier 展開が可能である。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-imt}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt \tag{11}$$

ところが、
$n - m = 0$　のとき、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$$

$n - m \neq 0$　のとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt &= \frac{1}{i(n-m)} \left[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right] \\ &= \frac{2\sin(n-m)\pi}{n-m} \\ &= 0\end{aligned}$$

すなわち、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \delta_{n,m}$$

となるので、(11) 式は、

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\,dt \tag{12}$$

となる。この式を、再び (10) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t-2\pi n)e^{-imt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)e^{-imt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{int} = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2\pi n) \tag{13}$$

を得る。

【別証】

$f(t)$ は、周期 2π の関数で、以下のような Fourier 展開が可能であるとしよう。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \qquad (-\pi \le t \le \pi)$$

すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt \tag{14}$$

$$= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\delta_{n,m} \tag{15}$$

$$= 2\pi c_m \tag{16}$$

すなわち、

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}\,dt$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n e^{int} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t')e^{-int'}\,dt' e^{int} \end{aligned}$$

つまり、

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{in(t-t')} \right] dt' \tag{17}$$

が成り立つ。このことから、

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$$

が得られる。

ところが、$f(t)$ は、周期 2π の関数である。実際、全ての整数 k に対して、

$$\begin{aligned} f(t+2k\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(t+2k\pi)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \\ &= f(t) \end{aligned} \tag{18}$$

となる。そこで、(17) 式と (18) 式より

$$f(t+2k\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{in(t-t')} \right] dt'$$

が成り立つので、$\displaystyle\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(t-t')}$ は、全ての整数 k に対して $\delta(t-t'-2k\pi)$ を含む。すなわち、

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(t-t')} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-t'-2k\pi) \tag{19}$$

が成り立つ。ここで $t'=0$ とおくと、再び (13) 式を得る。