# 破産問題 (ruin problem)

緑川章一

A と B が、丁半博打のように結果が 2 つに 1 つである賭けをする。最初に、A は所持金 $a$ を、B は所持金 $b$ を持っている。1 回の賭けで勝てば所持金は 1 だけ増え、負ければ 1 だけ減るものとし、一方が破産するまで賭けを続ける。A が勝つ確率を $p$、負ける確率を $q$ とすると、$p+q=1$ である。所持金 $a$ の A が破産する確率を $P(a)$ と書くことにすると、漸化式、

$$P(a) = pP(a+1) + qP(a-1) \tag{1}$$

が成り立つ。A の所持金が 0 になったとき、A は破産しゲームは終了となるので、$P(0)=1$ である。また、A の所持金が $N=a+b$ となったときは、A の勝ちでゲーム終了となるので、負ける確率は 0、すなわち、$P(N)=0$ である。

漸化式 (1) を解いて、$P(a)$ を求めよう。

**$p \neq q$ の場合**

(1) 式は、

$$P(a+1) - P(a) = \frac{q}{p}\big[P(a) - P(a-1)\big]$$

と書けるので、

$$\begin{aligned}
P(a) - P(a-1) &= \frac{q}{p}\big[P(a-1) - P(a-2)\big] \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^2 \big[P(a-2) - P(a-3)\big] \\
&= \cdots \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{a-1} \big[P(1) - P(0)\big]
\end{aligned}$$

ここで、$P(0)=1$ なので、

$$P(a) - P(a-1) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a-1} \big[P(1) - 1\big] \tag{2}$$

となる。ここで、$a=N$ を代入し、境界条件 $P(N)=0$ を用いると、

$$-P(N-1) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \big[P(1) - 1\big] \tag{3}$$

を得る。

(1) 式は、また、

$$pP(a+1) - qP(a) = pP(a) - qP(a-1)$$

とも書けるので、

$$pP(a) - qP(a-1) = pP(1) - q \tag{4}$$

が得られる。ここで、$a=N$ を代入すると、

$$-qP(N-1) = pP(1) - q \tag{5}$$

となる。

(3), (5) 式から、

$$
\begin{aligned}
P(1)-1 &= -\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \\
pP(1)-q &= -\frac{q\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}
\end{aligned}
$$

が得られる。これらを、各々、(2), (4) 式に代入すると、

$$
P(a)-P(a-1) = -\frac{\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{a-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \tag{6}
$$

$$
pP(a)-qP(a-1) = -\frac{q\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \tag{7}
$$

これらを $P(a)$ について解くと、

$$
P(a)=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \tag{8}
$$

を得る。

### $p=q=\dfrac{1}{2}$ の場合

(1) 式に $p=q=\dfrac{1}{2}$ を代入して、改めて解き直しても良いが、(8) 式からの極限として求めることもできる。$x=q/p$ とおいて $x$ が 1 の極限をとると、

$$
P(a)=\lim_{x\to 1}\frac{x^a-x^N}{1-x^N}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(x^a-x^N)}{\frac{d}{dx}(1-x^N)}=\lim_{x\to 1}\frac{ax^{a-1}-Nx^{N-1}}{-Nx^{N-1}}=\frac{N-a}{N}
$$

## ゲームの平均持続時間

所持金 $a$ のプレーヤーが、勝つか負けるかして、賭けが終了するまでの時間の期待値 $E(a)$ は、漸化式、

$$
E(a)=1+pE(a+1)+qE(a-1) \tag{9}
$$

を満たす。 ここで、境界条件は、$E(0)=E(N)=0$ で与えられる。この漸化式を解こう。

### $p\neq q$ の場合

(9) 式は、

$$
p\left(E(a+1)-E(a)+\frac{1}{p-q}\right)=q\left(E(a)-E(a-1)+\frac{1}{p-q}\right)
$$

と書くことができる。これは、$\left(E(a)-E(a-1)+\dfrac{1}{p-q}\right)$ が、初項 $\left(E(1)+\dfrac{1}{p-q}\right)$, 項比 $\dfrac{q}{p}$ の等比数列であることを表している。

$$
E(a)-E(a-1)+\frac{1}{p-q}=\left(\frac{q}{p}\right)^{a-1}\left(E(1)+\frac{1}{p-q}\right)
$$

次に、この数列の和を求める。

$$
\begin{array}{rrcl}
 & E(a)-E(a-1)+\dfrac{1}{p-q} &=& \left(\dfrac{q}{p}\right)^{a-1}\left(E(1)+\dfrac{1}{p-q}\right) \\
 & E(a-1)-E(a-2)+\dfrac{1}{p-q} &=& \left(\dfrac{q}{p}\right)^{a-2}\left(E(1)+\dfrac{1}{p-q}\right) \\
 & & \vdots & \\
 & E(2)-E(1)+\dfrac{1}{p-q} &=& \left(\dfrac{q}{p}\right)^{1}\left(E(1)+\dfrac{1}{p-q}\right) \\
+) & E(1)-E(0)+\dfrac{1}{p-q} &=& \left(\dfrac{q}{p}\right)^{0}\left(E(1)+\dfrac{1}{p-q}\right) \\
\hline
 & E(a)+\dfrac{a}{p-q} &=& \left\{1+\dfrac{q}{p}+\cdots+\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a-1}\right\}\left(E(1)+\dfrac{1}{p-q}\right)
\end{array}
$$

ここで、$E(0)=0$ を用いた。また、

$$
1+\frac{q}{p}+\cdots+\left(\frac{q}{p}\right)^{a-1}=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\frac{q}{p}}
$$

なので、

$$
E(a)+\frac{a}{p-q}=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\frac{q}{p}}\left(E(1)+\frac{1}{p-q}\right) \tag{10}
$$

を得る。ここで、$a=N$ とおくと、$E(N)=0$ だから、

$$
\frac{N}{p-q}=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}}{1-\frac{q}{p}}\left(E(1)+\frac{1}{p-q}\right)
$$

従って、

$$
E(1)+\frac{1}{p-q}=\frac{N}{p-q}\,\frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}}
$$

これを、(10) 式に代入して、整理すると、

$$
E(a)=\frac{1}{p-q}\left\{N\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{N}}-a\right\} \tag{11}
$$

**$p=q$ の場合**

$x=\dfrac{q}{p}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
E(a) &= 2\lim_{x\to 1}\frac{N(1-x^{a})-a(1-x^{N})}{(1-x)(1-x^{N})} \\
&= 2\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\left\{N(1-x^{a})-a(1-x^{N})\right\}}{\frac{d}{dx}(1-x)(1-x^{N})} \\
&= 2aN\lim_{x\to 1}\frac{x^{a-1}-x^{N-1}}{(1-x^{N})+Nx^{N-1}(1-x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2aN \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}\left\{x^{a-1} - x^{N-1}\right\}}{\frac{d}{dx}\left\{(1-x^N) + Nx^{N-1}(1-x)\right\}} \\
&= 2aN \lim_{x\to 1} \frac{(a-1)x^{a-2} - (N-1)x^{N-1}}{-2Nx^{N-1} + N(N-1)x^{N-2}(1-x)} \\
&= a(N-a)
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$E(a) = a(N-a)$$

を得る。

【別解】

(9) 式に、$p = q = \dfrac{1}{2}$ を代入して変形すると、

$$E(a+1) - E(a) = E(a) - E(a-1) - 2$$

となる。これを繰り返し用いることにより、

$$
\begin{aligned}
E(a) - E(a-1) &= E(a-1) - E(a-2) - 2 \\
&= E(a-2) - E(a-3) - 4 \\
&\;\;\vdots \\
&= E(1) - E(0) - 2(a-1)
\end{aligned}
$$

となる。$E(0) = 0$ なので、結局、

$$E(a) - E(a-1) = E(1) - 2(a-1)$$

を得る。また、変数を一つずつずらしながら足し合わせると、

$$
\begin{array}{lrl}
 & E(a) - E(a-1) & = E(1) - 2(a-1) \\
 & E(a-1) - E(a-2) & = E(1) - 2(a-2) \\
 & & \vdots \\
+) & E(1) & = E(1) \\
\hline
 & E(a) & = aE(1) - 2\{1 + 2 + 3 + \cdots + (a-1)\}
\end{array}
$$

となるので、

$$E(a) = aE(1) - a(a-1) \tag{12}$$

である。この式、$a = N$ を代入して、$E(N) = 0$ であることに留意すると、$E(1) = N(N-1)$ と求まる。この関係式を、再び、(12) 式に代入すると、

$$E(a) = a(N-a)$$

を得る。