演習問題８解答

問題　１コのサイコロを振る試行をおこなう。

(1) １回の試行で６の目が出る確率 p を求めよ。
$p = \frac{1}{6}$

(2) x 回目の試行で、初めて６の目が出る確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。
$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$

(3) ６の目が出るまでの平均の試行回数を求めよ。
$\mu = \frac{1}{p} = 6$

(4) x の分散を求めよ。
$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = 30$

(5) x 回の試行で、一度も６の目が出ない確率 $\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。
$\mathrm{Q}(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$

(6) $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。
$\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^x = \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \mathrm{Q}(x-1)$

(7) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x-1) + (\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)) \\
&= \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + (\mathrm{P}(x-1) + \mathrm{Q}(x-1)) \\
&= \cdots \\
&= \mathrm{P}(1) + \mathrm{Q}(1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(8) 『１コのサイコロを n 回振って、６の目が出たら勝ち』というゲームが有利であるためには、n が条件、

$$\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(n) > \frac{1}{2}$$

を満たせば良い。最小の n を求めよ。
(7) より、$\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(n) = 1 - \mathrm{Q}(n)$　だから、
$1 - Q(n) > \frac{1}{2}$. したがって、$\frac{1}{2} > Q(n)$.
$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}, \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{75}{216}, \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \cdots$
なので、$\left(\frac{5}{6}\right)^4 < \frac{1}{2}$. ゆえに、$n = 4$