演習問題 10

問題 1.

[1] 50 本のくじの中に、賞金 100 円の当たりくじが 1 本ある。このくじを 1 本ずつ順に 2 本引く。このときに得る賞金を X 円とする。

(1) 1 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{1}{50}$

(2) 1 本目が外れくじである確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{49}{50}$

(3) 1 本目が外れくじであったとき、2 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \dfrac{1}{49}$

(4) 2 本目が当たりくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{1}{49} \times \dfrac{49}{50} = \dfrac{1}{50}$

(5) 2 本のうち、1 本が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}) = \dfrac{1}{25} \left(= \dfrac{1 \times 49}{{}_{50}C_2} = \dfrac{2 \times 49}{50 \times 49} \right)$

(6) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。
$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{48}{49}\dfrac{49}{50} = \dfrac{48}{50} = \dfrac{24}{25} \left(= \dfrac{{}_{49}C_2}{{}_{50}C_2} \right)$

(7) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 100 \times \dfrac{1}{25} = 4$ 円

(8) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \dfrac{1}{25} - 4^2 = 384$

[2] 100 本のくじの中に、賞金 100 円のあたりくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(1) 2 本とも当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。
$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{1}{99}\dfrac{2}{100} = \dfrac{2}{9900} = \dfrac{1}{4950} \left(= \dfrac{1}{{}_{100}C_2} \right)$

(2) 1 本目が当りで 2 本目が外れとなる確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{98}{99}\dfrac{2}{100} = \dfrac{98}{4950} = \dfrac{49}{2475}$

(3) 1 本目が外れで 2 本目が当りとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{2}{99}\dfrac{98}{100} = \dfrac{98}{4950} = \dfrac{49}{2475}$

(4) 2 本のうち 1 本が当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \dfrac{98}{2475} \left(= \dfrac{2 \times 98}{{}_{100}C_2} \right)$

(5) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。
$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{97}{99}\dfrac{98}{100} = \dfrac{97 \times 49}{4950} = \dfrac{4753}{4950} \left(= \dfrac{{}_{98}C_2}{{}_{100}C_2} \right)$

(6) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 100 \times \dfrac{98}{2475} + 200 \times \dfrac{1}{4950} = 4$

(7) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \dfrac{98}{2475} + 200^2 \times \dfrac{1}{4950} - 4^2 = \dfrac{38416}{99} \approx 388.0404$

問題 2.　サイコロを 1 の目が出るまで繰り返し振って、1 の目が出たら振るのをやめることにする。1 の目が出るまでにサイコロを振る回数を確率変数 X として次の問いに答えよ。

a x 回目にはじめて 1 の目が出る確率 P(x) を求めよ。$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$

b x の平均を求めよ。$\mu = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

c x の分散を求めよ。$\sigma^2 = \frac{1-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$

問題 3.

(a) サイコロを何回も振って、6 の目が 2 回出たらやめることにする。7 回目でサイコロを振るのをやめる確率を求めよ。
1 回から 6 回までに 1 度 6 の目が、残りの 5 回は 6 以外の目が出なければならない。その確率は、
${}_6C_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5$ 7 回目に 6 の目が出る確率は$\frac{1}{6}$ だから、答えは、

$$ {}_6C_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \frac{1}{6} = \frac{5^5}{6^6} = \frac{3125}{46656} $$

(b) サイコロを何回も振って、6 の目が 2 回出たらやめることにする。7 回目に終わったとき、4 回目に 6 の目が出た確率を求めよ。
7 回目で終わったことは、 1 回から 6 回までの間に唯 1 回 6 の目が出たことを表している。1 の目の出方は 6 通りあるので、4 回目に 6 の目が出た確率は、$\frac{1}{6}$ である。