ベイズの定理 ― 例題

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題 (Monty Hall problem) とは、アメリカのテレビショー『駆け引きしましょう』(Let's make a deal) で司会を勤めるモンティ・ホールにちなんで名づけられた確率の問題である。

あなたは、このテレビのゲーム・ショーに出ているとしよう。このショーでは、ゲストであるあなたは目の前の３つの扉のうちの一つを選ばなければならない。１つの扉が当たりで、その後ろには景品の自動車がある。残りの２つの扉ははずれで、その後ろにはヤギがいる。あなたは、当たりと思うドア選ばなければならない。司会者は、扉の後ろに何があるかを知っているので、残った２つの一方を開けてみせる。すると、そこからはヤギが出てくる。そこで、司会者はあなたに向かって、こう尋ねる。

「あなたは、扉を選び直しますか。それともそのまま変えませんか。」
あなたにとって有利な選択はどちらだろうか。

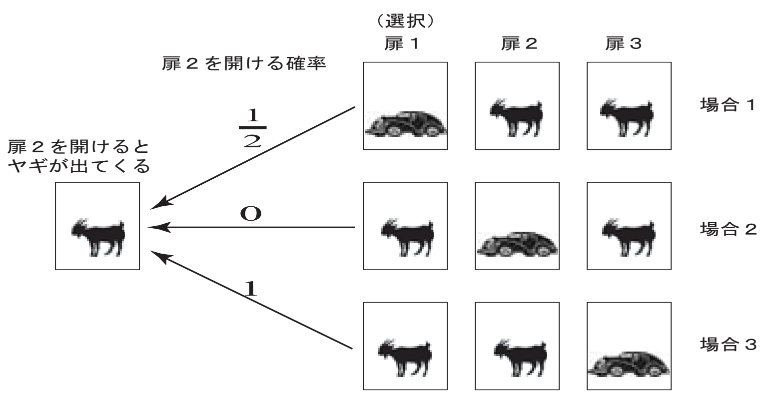

図 1: モンティー・ホール問題：出演者が扉１を選んだ場合に扉２を開ける確率

扉に 1，2，3 と番号をつけることにしよう。1 番目の扉が当たりである確率を $P(1_{当})$ と、2 番目の扉が当たりである確率を $P(2_{当})$ などと書くことにすると、どの扉を選んでも車が当たる確率は 1/3 なので、

$$P(1_{当}) = P(2_{当}) = P(3_{当}) = \frac{1}{3}$$

である。そこで簡単のために、あなたは 1 番目の扉を選んだとしよう。すると、モンティが選べるのは 2 番目か 3 番目の扉に限られる。しかし、彼は決して車のある扉を開けることはない。モンティが 2 番目の扉を開けたとしよう。当然のことな

がら、現れるのはヤギである。自動車があるのは 1 番目か 3 番目の扉の後ろである。それでは、モンティが 2 番目の扉を開ける確率はいくらだろうか。

1 番目の扉が当たりの場合、2 番目か 3 番目のどちらの扉を選ぶことができ、その確率を各々$P(2_{開}|1_{当})$、$P(3_{開}|1_{当})$ と書くことにすると、これらは等しく 1/2 なので、

$$P(2_{開}|1_{当}) = P(3_{開}|1_{当}) = \frac{1}{2}$$

である。したがって、１番目が当たりでモンティが 2 番目の扉を開ける確率は、

$$P(2_{開}|1_{当})P(1_{当}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

である。

２番目が当たりの確率も 1/3 であるが、この扉を開けることはできない。したがって 2 番目の扉を開ける確率は、

$$P(2_{開}|2_{当})P(2_{当}) = 0 \times \frac{1}{3} = 0$$

である。

3 番目の扉が当たりの場合には、モンティは 2 番目の扉を選ぶしか方法がない。したがって、3 番目が当たりで 2 番目を開ける確率は、

$$P(2_{開}|3_{当})P(3_{当}) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

である。

2 番目を開ける確率 $P(2_{開})$ は、上で求めた三つの確率を足し合わせたもの、

$$P(2_{開}) = P(2_{開}|1_{当})P(1_{当}) + P(2_{開}|2_{当})P(2_{当}) + P(2_{開}|3_{当})P(3_{当}) = \frac{1}{2}$$

で与えられる。そこでモンティが 2 番目を開けた場合、1 番目が当たりの確率は、

$$P(1_{当}|2_{開}) = \frac{P(2_{開}|1_{当})P(1_{当})}{P(2_{開})} = \frac{1}{3},$$

となる。これは、2 番目の扉が開けられる前の確率 $P(1_{当})$ と同じである。一方、3 番目が当たりの確率は、

$$P(3_{当}|2_{開}) = \frac{P(2_{開}|3_{当})P(3_{当})}{P(2_{開})} = \frac{2}{3}$$

となり、扉を選び直すと当たる確率は倍になるのである。