

ベイズ推定 (Bayesian Inference)

1 ベイズの定理

ベイズの定理は、

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k)}$$

と書ける。

この公式を確率関数に含まれるパラメータ θ_i の決定に用いる。すなわち、事象 A_i の確率 $P(A_i)$ の代わりに θ_i の確率 $\pi(\theta_i)$ を考える。パラメータが値 θ_i を取るときに事象 x が起こる確率を $f(x|\theta_i)$ で表す。すると、事象 x が起こったことが分かったときのパラメータ θ_i の確率 $P(\theta_i|x)$ は、

$$\pi(\theta_i|x) = \frac{f(x|\theta_i)\pi(\theta_i)}{\sum_{k=1}^n f(x|\theta_k)\pi(\theta_k)}$$

で与えられる。 θ が連続の場合には、

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

となる。 $f(x|\theta)$ を尤度関数と呼ぶ。

2 二項分布またはベータ分布における p の推定

例として、硬貨投げ (coin flipping) を考えよう。硬貨を放り投げたときに、表 (Heads - H) が出る確率 p の取る値を θ とすると、裏 (Tails - T) の出る確率は $1 - \theta$ である。すなわち、1 回目に表または裏が出る確率は、各々、

$$\begin{aligned} f(H_1|\theta) &= \theta \\ f(T_1|\theta) &= 1 - \theta \end{aligned}$$

となる。硬貨を投げる前は、 θ は、0 から 1 のどの値も同様に確からしいとする。

$$\pi(\theta) = 1$$

すると、表または裏が出たと分かった時の θ の確率分布は、

$$\pi(\theta|H_1) = \frac{\theta \times 1}{\int_0^1 \theta \times 1 d\theta} = 2\theta \tag{1}$$

$$\pi(\theta|T_1) = \frac{(1 - \theta) \times 1}{\int_0^1 (1 - \theta) \times 1 d\theta} = 2(1 - \theta) \tag{2}$$

1 回目にコインの表 (H) が出た場合には、 $\pi(\theta|H) = 2\theta$ を新たな事前確率分布として 2 回目のコイン投げを行う。すると、

$$\begin{aligned}\pi(\theta|H_2H_1) &= \frac{\theta \times 2\theta}{\int_0^1 \theta \times 2\theta d\theta} = 3\theta^2 \\ \pi(\theta|T_2H_1) &= \frac{(1-\theta) \times 2\theta}{\int_0^1 (1-\theta) \times 2\theta d\theta} = 6\theta(1-\theta)\end{aligned}$$

1 回目にコインの裏 (T) が出た場合には、 $\pi(\theta|T) = 2(1-\theta)$ を新たな事前確率分布として 2 回目のコイン投げを行うと、

$$\begin{aligned}\pi(\theta|H_2T_1) &= \frac{\theta \times 2(1-\theta)}{\int_0^1 \theta \times 2(1-\theta) d\theta} = 6\theta(1-\theta) \\ \pi(\theta|T_2T_1) &= \frac{(1-\theta) \times 2(1-\theta)}{\int_0^1 (1-\theta) \times 2(1-\theta) d\theta} = 3(1-\theta)^2\end{aligned}$$

3 度目のコイン投げ

$$\begin{aligned}\pi(\theta|H_3H_2H_1) &= \frac{\theta \times 3\theta^2}{\int_0^1 \theta \times 3\theta^2 d\theta} = 4\theta^3 \\ \pi(\theta|T_3H_2H_1) &= \frac{(1-\theta) \times 3\theta^2}{\int_0^1 (1-\theta) \times 3\theta^2 d\theta} = 12\theta^2(1-\theta) \\ \pi(\theta|H_3T_2H_1) &= \frac{\theta \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 \theta \times 6\theta(1-\theta) d\theta} = 12\theta^2(1-\theta) \\ \pi(\theta|T_3T_2H_1) &= \frac{(1-\theta) \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 (1-\theta) \times 6\theta(1-\theta) d\theta} = 12\theta(1-\theta)^2 \\ \pi(\theta|H_3H_2T_1) &= \frac{\theta \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 \theta \times 6\theta(1-\theta) d\theta} = 12\theta^2(1-\theta) \\ \pi(\theta|T_3H_2T_1) &= \frac{(1-\theta) \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 (1-\theta) \times 6\theta(1-\theta) d\theta} = 12\theta(1-\theta)^2 \\ \pi(\theta|H_3T_2T_1) &= \frac{\theta \times 3(1-\theta)^2}{\int_0^1 \theta \times 3(1-\theta)^2 d\theta} = 12\theta(1-\theta)^2 \\ \pi(\theta|T_3T_2T_1) &= \frac{(1-\theta) \times 3(1-\theta)^2}{\int_0^1 (1-\theta) \times 3(1-\theta)^2 d\theta} = 4(1-\theta)^3\end{aligned}$$

一般に、コインを n 回投げた場合、順序は問わずに表が α 回、裏が β 回出たとすると、一回の試行で表が出る確率 p の値の確率分布は、ベータ分布

$$f(x; m, n) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}\pi(\theta | \text{表の出た回数} = \alpha, \text{裏の出た回数} = \beta) &= f(\theta; \alpha+1, \beta+1) \\ &= \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha! \beta!} \theta^\alpha (1-\theta)^\beta\end{aligned}$$

と表されることが分かる。

θ の平均値

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \int_0^1 \theta f(\theta; \alpha + 1, \beta + 1) d\theta \\ &= \frac{(\alpha + \beta + 1)!}{\alpha! \beta!} \int_0^1 \theta^{\alpha+1} (1 - \theta)^\beta d\theta \end{aligned}$$

を計算すれば良い。積分は部分積分法を用いる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta^{\alpha+1} (1 - \theta)^\beta d\theta &= \frac{1}{\alpha + 2} \int_0^1 \left(\frac{d}{d\theta} \theta^{\alpha+2} \right) (1 - \theta)^\beta d\theta \\ &= \frac{1}{\alpha + 2} \left\{ \theta^{\alpha+2} (1 - \theta)^\beta \Big|_0^1 + \beta \int_0^1 \theta^{\alpha+2} (1 - \theta)^{\beta-1} d\theta \right\} \\ &= \frac{\beta}{\alpha + 2} \int_0^1 \theta^{\alpha+2} (1 - \theta)^{\beta-1} d\theta \\ &= \frac{\beta(\beta - 1) \cdots 1}{(\alpha + 2)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 \theta^{\alpha+\beta+1} d\theta \\ &= \frac{\beta(\beta - 1) \cdots 1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 2)} \\ &= \frac{(\alpha + 1)! \beta!}{(\alpha + \beta + 2)!} \end{aligned}$$

となるので、

$$E(\theta) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2}$$

を得る。

θ の最尤推定

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{(\alpha + \beta + 1)!}{\alpha! \beta!} \theta^\alpha (1 - \theta)^\beta \right\} = 0 \text{ より、 } \theta = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

3 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ における平均 μ の推定

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から n コのデータ $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を取り出した場合、その尤度は、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}|\theta) &= f(x_n|\theta) f(x_{n-1}|\theta) \cdots f(x_1|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ を導入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 &= \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}_n) - (\bar{x}_n - \theta)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}_n)^2 - 2(\bar{x}_n - \theta)(x_i - \bar{x}_n) + (\bar{x}_n - \theta)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - \theta)^2 \end{aligned}$$

となるので、

$$f(\mathbf{x}|\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{(\bar{x}_n - \theta)^2}{2\sigma^2/n} \right\}$$

したがって、 θ の事後分布は、

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{(\theta - \bar{x}_n)^2}{2\sigma^2/n} \right\} \pi(\theta)$$

となる。

ここで、 θ の事前分布 $\pi(\theta)$ を、平均 θ_0 、分散 σ_0^2 の正規分布

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp \left\{ -\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_0^2} \right\}$$

に選ぶと、

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{(\theta - \bar{x}_n)^2}{2\sigma^2/n} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_0^2} \right\}$$

ところで、

$$\begin{aligned} \frac{(\theta - \bar{x}_n)^2}{\sigma^2/n} + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\sigma_0^2} &= \frac{n}{\sigma^2} (\theta^2 - 2\bar{x}_n\theta + \bar{x}_n^2) + \frac{1}{\sigma_0^2} (\theta^2 - 2\theta_0\theta + \theta_0^2) \\ &= \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \theta^2 - 2 \left(\frac{n\bar{x}_n}{\sigma^2} + \frac{\theta_0}{\sigma_0^2} \right) \theta + \left(\frac{n\bar{x}_n^2}{\sigma^2} + \frac{\theta_0^2}{\sigma_0^2} \right) \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n^2} &= \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} \\ \frac{\theta_n}{\sigma_n^2} &= \frac{n\bar{x}_n}{\sigma^2} + \frac{\theta_0}{\sigma_0^2} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{(\theta - \bar{x}_n)^2}{\sigma^2/n} + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\sigma_0^2} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \theta^2 - 2 \frac{\theta_n}{\sigma_n^2} \theta + \dots \\ &= \frac{(\theta - \theta_n)^2}{\sigma_n^2} + \dots \end{aligned}$$

となるので、

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{(\theta - \theta_n)^2}{2\sigma_n^2} \right\} \tag{3}$$

である。

さらに新しいデータ x_{n+1} が得られたとすると、今度は (3) 式を事前分布として θ の事後分布を求めると、

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x_{n+1}) &\propto \exp\left\{-\frac{(x_{n+1}-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_{n+1})^2}{2\sigma_{n+1}^2}\right\}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_{n+1}^2} &= \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_n^2} \\ \frac{\theta_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2} &= \frac{x_{n+1}}{\sigma^2} + \frac{\theta_n}{\sigma_n^2}\end{aligned}$$

または、

$$\theta_{n+1} = \frac{\sigma_n^2 x_{n+1} + \sigma^2 \theta_n}{\sigma_n^2 + \sigma^2}$$

を得る。

4 カルマンフィルタ (Kalman Filter)

4.1 導出-その1

時刻 t における状態を $x(t)$ 、観測値を $y(t)$ と置く。ここでは、簡単のために $x(t)$ と $y(t)$ はスカラーとする。また、時刻 1 における観測値 $y(1)$ から時刻 t における観測値 $y(t)$ までを用いた後の状態 $x(t)$ の推定値 (期待値、または、平均値) を $\hat{x}(t)$ と書く。状態 $x(t)$ は推定値 $\hat{x}(t)$ を中心とする分散 $\sigma_a(t)^2$ の正規分布に従うとする。ここで、サフィックス a は、観測値 $y(t)$ が求まった後 (after) であることを表す。

$$P(x(t)|\hat{x}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}} \exp\left\{-\frac{(x(t)-\hat{x}(t))^2}{2\sigma_a^2(t)}\right\} \quad (4)$$

すなわち、

$$y(t) \text{ を用いて推定した } x(t) : N(\hat{x}(t), \sigma_a(t)) \text{ に従う}$$

これを、

$$x(t) = \hat{x}(t) + v_a(t)$$

とも書くことにしよう。

状態方程式を

$$x(t) = Gx(t-1) + w(t) \quad (5)$$

とする。簡単のため G は時間に依存しない定数とする。 $w(t)$ は、平均 0、分散 $\sigma_w^2(t)$ の正規分布に従うとする。すなわち、

$$w(t) : N(0, \sigma_w(t)) \text{ に従うシステム雑音} \quad (6)$$

言い換えると、

$$P(x(t)|Gx(t-1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2(t)}} \exp\left\{-\frac{(x(t) - Gx(t-1))^2}{2\sigma_w^2(t)}\right\} \quad (7)$$

である。

時刻 $t-1$ に置ける状態の推定値 $\hat{x}(t-1)$ から状態方程式 (5) を用いて推定した時刻 t の状態を $\hat{x}^-(t)$ で表すと、

$$\hat{x}^-(t) = G\hat{x}(t-1) \quad (8)$$

$\hat{x}^-(t)$ は、観測値 $y(t)$ を利用する前の $x(t)$ の推定値である。この時、 $x(t)$ の確率分布は、平均が $\hat{x}^-(t)$ で分散が $\sigma_b^2(t)$ の正規分布に従うとする。分散にサフィックス b を付けたのは、時刻 t における観測 $y(t)$ はまだ使われていない事を表す。

$$P(x(t)|\hat{x}^-(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(t)}} \exp\left\{-\frac{(x(t) - \hat{x}^-(t))^2}{2\sigma_b^2(t)}\right\} \quad (9)$$

または、

$$x(t) = \hat{x}^-(t) + v_b(t)$$

である。すると、

$$\begin{aligned} x(t) &= Gx(t-1) + v_w(t) \\ &= G(\hat{x}(t-1) + v_a(t-1)) + v_w(t) \\ &= G\hat{x}(t-1) + Gv_a(t-1) + v_w(t) \\ &= G\hat{x}(t-1) + v_b(t) \end{aligned}$$

となるので、

$$v_b(t) = Gv_a(t-1) + v_w(t) \quad (10)$$

が成り立つ。これは、

$$\sigma_b^2(t) = G^2\sigma_a^2(t-1) + \sigma_w^2(t) \quad (11)$$

が成り立つことを意味する。

(10) 式から (11) 式が導かれることを証明する。

簡単のために、

$$\begin{aligned} Z &= v_b(t), & \sigma_Z^2 &= \sigma_b^2(t) \\ X &= Gv_a(t-1), & \sigma_X^2 &= G^2\sigma_a^2(t-1) \\ Y &= v_w(t), & \sigma_Y^2 &= \sigma_w^2(t) \end{aligned}$$

とおく。ここで、 X と Y は独立である。

関係式 $Z = X + Y$ より、

$$P_Z(Z) = \int \delta(Z - X - Y)P_X(X)P_Y(Y) dXdY \quad (12)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= \int Z^2 P_Z(Z) dZ \\ &= \int Z^2 \delta(Z - X - Y) P_X(X) P_Y(Y) dXdY dZ \\ &= \int (X + Y)^2 P_X(X) P_Y(Y) dXdY \\ &= \int (X^2 + 2XY + Y^2) P_X(X) P_Y(Y) dXdY \\ &= \int X^2 P_X(X) dX + 2 \int X P_X(X) dX \int Y P_Y(Y) dY + \int Y^2 P_Y(Y) dY \end{aligned}$$

ところが、

$$\int X P_X(X) dX = \int Y P_Y(Y) dY = 0$$

なので、

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

を、すなわち、(11) 式を得る。

観測方程式を

$$y(t) = F_t x(t) + v(t) \quad (13)$$

ここで、

$$v(t) : N(0, \sigma_v^2(t)) \quad (14)$$

とする。

$\hat{x}^-(t)$ から予測した $y(t)$ を $\hat{y}^-(t)$ と書こう。これは (13) 式を用いると、

$$\hat{y}^-(t) = F_t \hat{x}^-(t) = F_t G \hat{x}(t-1) \quad (15)$$

となる。実際の観測量 $y(t)$ から $\hat{y}^-(t)$ を引いた量 $e(t)$ を定義する。

$$e(t) = y(t) - \hat{y}^-(t) \quad (16)$$

$$= F_t (x(t) - \hat{x}^-(t)) + v(t) \quad (17)$$

これをイノベーションという。これは、平均が $F_t (x(t) - G \hat{x}(t-1))$ 、分散が $\sigma_v^2(t)$ の正規分布にしたがう。

ここで、

$$e'(t) = \frac{e(t)}{F_t} + \hat{x}^-(t) \quad (18)$$

とおくと、

$$e'(t) = x(t) + \frac{v(t)}{F_t}$$

となる。これは、平均が $x(t)$ 、分散が $\sigma_v^2(t)/F_t^2$ の積分布に従う。すなわち、

$$P(e'(t)|x(t)) = \sqrt{\frac{F_t^2}{2\pi\sigma_v^2(t)}} \exp\left\{-\frac{F_t^2}{2\sigma_v^2(t)}(e'(t) - x(t))^2\right\} \quad (19)$$

となる。

$$P(e'(t)|\hat{x}^-(t)) = \int P(e'(t)|x(t))P(x(t)|\hat{x}^-(t)) dx(t) \quad (20)$$

に (9) 式と (19) 式を代入することにより、 $e'(t)$ が与えられたときの、 $x(t)$ の事後分布は、

$$P(x(t)|e'(t), \hat{x}^-(t)) \propto \exp\left\{-\frac{F_t^2}{2\sigma_v^2(t)}(e'(t) - x(t))^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{(x(t) - \hat{x}^-(t))^2}{2\sigma_b^2(t)}\right\} \quad (21)$$

そこで、 $P(x(t)|e'(t), \hat{x}^-(t))$ を $P(x(t)|\hat{x}(t))$ と書くことにすると、これは、

$$P(x(t)|\hat{x}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}} \exp\left\{-\frac{((x(t) - \hat{x}(t))^2)}{2\sigma_a^2(t)}\right\} \quad (22)$$

と表される。ここで、

$$\frac{1}{\sigma_a^2(t)} = \frac{F_t^2}{\sigma_v^2(t)} + \frac{1}{\sigma_b^2(t)} \quad (23)$$

$$\frac{\hat{x}(t)}{\sigma_a^2(t)} = \frac{F_t^2 e'(t)}{\sigma_v^2(t)} + \frac{\hat{x}^-(t)}{\sigma_b^2(t)} \quad (24)$$

である。

すなわち、(23) 式より、

$$\sigma_a^2(t) = \frac{\sigma_b^2(t)\sigma_v^2(t)}{F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)} \quad (25)$$

また、(11) 式より、

$$\sigma_b^2(t) = G^2\sigma_a^2(t-1) + \sigma_w^2(t) \quad (26)$$

である。

また、(24) 式に (18) 式を代入し (23), (25) 式を用いると、

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sigma_a^2(t) \left\{ \frac{F_t^2}{\sigma_v^2(t)} \left(\frac{e(t)}{F_t} + \hat{x}^-(t) \right) + \frac{G\hat{x}(t-1)}{\sigma_b^2(t)} \right\} \\ &= \sigma_a^2(t) \left\{ \frac{F_t^2}{\sigma_v^2(t)} + \frac{1}{\sigma_b^2(t)} \right\} \hat{x}^-(t) + \frac{F_t\sigma_a^2(t)}{\sigma_v^2(t)} e(t) \\ &= \hat{x}^-(t) + \frac{F_t\sigma_b^2(t)}{F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)} e(t) \end{aligned}$$

を得る。

さらに、この状態推定値 $\hat{x}(t)$ をイノベーションの (16) 式を用いて書き改めると、

$$\hat{x}(t) = \hat{x}^-(t) + K(t)(y(t) - \hat{y}^-(t)) \quad (27)$$

となる。ここで、

$$K(t) = \frac{F_t \sigma_b^2(t)}{F_t^2 \sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)} \quad (28)$$

をカルマンゲイン (Kalman gain) という。

(25) 式をカルマンゲインを用いて書き直すと、

$$\sigma_a^2(t) = (1 - F_t K(t)) \sigma_b^2(t) \quad (29)$$

となる。

リッカチ (Riccati) 方程式

(25) 式の t を $t-1$ に置き換えて (26) 式に代入すると、

$$\sigma_b^2(t) = G^2 \frac{\sigma_b^2(t-1) \sigma_v^2(t-1)}{F_{t-1}^2 \sigma_b^2(t-1) + \sigma_v^2(t-1)} + \sigma_w^2(t) \quad (30)$$

$$= G^2 (1 - F_{t-1} K(t-1)) \sigma_b^2(t-1) + \sigma_w^2(t) \quad (31)$$

となるので、

$$\sigma_b^2(t) = G^2 \left(\sigma_b^2(t-1) - \frac{F_{t-1}^2 \sigma_b^4(t-1)}{F_{t-1}^2 \sigma_b^2(t-1) + \sigma_v^2(t-1)} \right) + \sigma_w^2(t) \quad (32)$$

を得る。これをリッカチ (Riccati) 方程式という。

定常状態では、 $\sigma_b^2(t) = \sigma_b^2(t-1)$ だから、これらを p と置いて、 F_{t-1} を F と書く。また、 $\sigma_v^2(t)$ も $\sigma_w^2(t)$ も時間に依らないので、

$$p = G^2 \left(p - \frac{F^2 p^2}{F^2 p + \sigma_v^2} \right) + \sigma_w^2 \quad (33)$$

を得る。

特別な場合として、 $G = F = 1$ と置くと (33) 式は、

$$p^2 - \sigma_w^2 p - \sigma_v^2 \sigma_w^2 = 0 \quad (34)$$

となる。

4.2 導出-その2

時刻 t における状態の推定値 $\hat{x}(t)$ は、(27) 式のように書けると考えるのは自然である。そこで、(27) 式から出発して、(4) 式で定義した

$$\sigma_a^2(t) = E \left[(x(t) - \hat{x}(t))^2 \right] \quad (35)$$

を最小にするという条件から $K(t)$ を決定しよう。

$x(t) - \hat{x}(t)$ を (13), (15) 式を用いて書き直すと、

$$x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - \left(\hat{x}^-(t) + K(t)(y(t) - \hat{y}^-(t)) \right) \quad (36)$$

$$= (x(t) - \hat{x}^-(t)) - K(t)(F_t x(t) + v(t) - F_t G \hat{x}(t-1)) \quad (37)$$

$$= (1 - K(t)F_t)(x(t) - \hat{x}^-(t)) - K(t)v(t) \quad (38)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \sigma_a^2(t) &= E[(x(t) - \hat{x}(t))^2] \\ &= (1 - K(t)F_t)^2 E[(x(t) - \hat{x}^-(t))^2] + K^2(t)E[v^2(t)] \end{aligned} \quad (39)$$

を得る。(9) 式および (14) より、

$$E[(x(t) - \hat{x}^-(t))^2] = \sigma_b^2(t)$$

$$E[v^2(t)] = \sigma_v^2(t)$$

なので、(39) 式は、

$$\sigma_a^2 = (1 - K(t)F_t)^2 \sigma_b^2 + K^2(t) \sigma_v^2(t) \quad (40)$$

となる。

この式を $K(t)$ で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_a^2}{dK(t)} &= -2F_t(1 - K(t)F_t)\sigma_b^2(t) + 2K(t)\sigma_v^2(t) \\ &= -2F_t\sigma_b^2(t) + 2K(t)(F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)) \end{aligned}$$

この式を 0 とおくと、

$$K(t) = \frac{F_t\sigma_b^2(t)}{F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)}$$

を得る。

4.3 例 1次元ランダムウォーク (1-D Random Walk)

時刻 t における粒子の位置を x_t と書く。最初 ($t=0$) の粒子の位置を測定した結果を y_0 する。測定は誤差を含むので、実際の位置 x_0 は、推定値 $\hat{x}_0 = y_0$ を中心とする正規分布で与えられる。

$$\begin{aligned} P(x_0|y_0) &= P(x_0|\hat{x}_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left\{-\frac{(x_0 - \hat{x}_0)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \end{aligned} \quad (41)$$

これを、

$$y_0 = x_0 + v, \quad v \sim N(0, \sigma_v^2)$$

と書こう。

単位時間経過後の粒子の位置 x_1 は、 x_0 を中心とする正規分布

$$x_1 = x_0 + w, \quad w \sim N(0, \sigma_w^2)$$

で与えられる。すなわち、

$$P(x_1|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left\{-\frac{(x_1-x_0)^2}{2\sigma_w^2}\right\} \quad (42)$$

となるので、実際の位置は、

$$P(x_1|\hat{x}_0) = \int P(x_1|x_0)P(x_0|\hat{x}_0) dx_0 \quad (43)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \int \exp\left\{-\frac{(x_1-x_0)^2}{2\sigma_w^2} - \frac{(x_0-\hat{x}_0)^2}{2\sigma_v^2}\right\} dx_0 \quad (44)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_w^2 + \sigma_v^2)}} \exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_0)^2}{2(\sigma_w^2 + \sigma_v^2)}\right\} \quad (45)$$

で与えられる。ここで、新しい記号

$$\sigma_b^2(1) = \sigma_w^2 + \sigma_v^2 \quad (46)$$

を導入すると、上の (45) 式は、

$$P(x_1|\hat{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(1)}} \exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_0)^2}{2\sigma_b^2(1)}\right\} \quad (47)$$

と書くことができる。

時刻 $t = 1$ のときに、この粒子の位置を観測したところ、 y_1 であることが分かったとしよう。粒子の位置が x_1 であった時に観測値が y_1 である確率は、

$$P(y_1|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \quad (48)$$

従って、

$$P(y_1|\hat{x}_0) = \int P(y_1|x_1)P(x_1|\hat{x}_0) dx_1$$

を得る。ゆえに、観測値 y_1 が得られたときに x_1 の事後分布は、

$$P(x_1|\hat{x}_0, y_1) \propto P(y_1|x_1)P(x_1|\hat{x}_0) \quad (49)$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_0)^2}{2\sigma_b^2(1)}\right\} \quad (50)$$

で与えられる。すなわち、

$$P(x_1|\hat{x}_0, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(1)}} \exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_1)^2}{2\sigma_a^2(1)}\right\} = P(x_1|\hat{x}_1) \quad (51)$$

を得る。ここに、

$$\frac{1}{\sigma_a^2(1)} = \frac{1}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_b^2(1)} \quad (52)$$

$$\frac{\hat{x}_1}{\sigma_a^2(1)} = \frac{y_1}{\sigma_v^2} + \frac{\hat{x}_0}{\sigma_b^2(1)} \quad (53)$$

である。

イノベーションを $e_1 = y_1 - \hat{x}_0$ で定義して、(53) 式の \hat{x}_1 を書き直すと、

$$\hat{x}_1 = \sigma_a^2(1) \left\{ \frac{\hat{x}_0 + e_1}{\sigma_v^2} + \frac{\hat{x}_0}{\sigma_b^2(1)} \right\}$$

より

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_0 + \frac{\sigma_b^2(1)}{\sigma_b^2(1) + \sigma_v^2} e_1 \quad (54)$$

を得る。

カルマンゲインは、

$$K = \frac{\sigma_b^2(1)}{\sigma_b^2(1) + \sigma_v^2}$$

となる。

次に、 $t = 2$ の場合に進もう。(41) 式の代わりに (51) を用い、(42) 式を

$$P(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - x_1)^2}{2\sigma_w^2} \right\} \quad (55)$$

で置き換えると、

$$P(x_2|\hat{x}_1) = \int P(x_2|x_1)P(x_1|\hat{x}_1) dx_1 \quad (56)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(2)}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - \hat{x}_1)^2}{2\sigma_b^2(2)} \right\} \quad (57)$$

$$(58)$$

で与えられる。ここで、

$$\sigma_b^2(2) = \sigma_w^2 + \sigma_a^2(1) \quad (59)$$

である。また、

$$P(y_2|\hat{x}_1) = \int P(y_2|x_2)P(x_2|\hat{x}_1) dx_2$$

だから、観測値 y_2 が得られたときに x_2 の事後分布は、

$$P(x_2|\hat{x}_1, y_2) \propto P(y_2|x_2)P(x_2|\hat{x}_1) \quad (60)$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{(y_2 - x_2)^2}{2\sigma_v^2} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{(x_2 - \hat{x}_1)^2}{2\sigma_b^2(2)} \right\} \quad (61)$$

$$(62)$$

で与えられる。

$$P(x_2|\hat{x}_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(2)}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - \hat{x}_2)^2}{2\sigma_a^2(2)} \right\} \quad (63)$$

$$= P(x_2|\hat{x}_2) \quad (64)$$

と書くことにすると、

$$\frac{1}{\sigma_a^2(2)} = \frac{1}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_b^2(2)} \quad (65)$$

$$\frac{\hat{x}_2}{\sigma_a^2(2)} = \frac{y_2}{\sigma_v^2} + \frac{\hat{x}_1}{\sigma_b^2(2)} \quad (66)$$

となる。

イノベーション $e_2 = y_2 - \hat{x}_1$ を用いて、(66) 式の \hat{x}_2 を書き直すと、

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \frac{\sigma_b^2(2)}{\sigma_b^2(2) + \sigma_v^2} e_1 \quad (67)$$

を得る。

カルマンゲインは、

$$K = \frac{\sigma_b^2(2)}{\sigma_b^2(2) + \sigma_v^2}$$

となる。

一般に任意の t の場合には、

$$x_t = x_{t-1} + w, \quad w \sim N(0, \sigma_w^2) \quad (68)$$

$$y_t = x_t + v, \quad v \sim N(0, \sigma_v^2) \quad (69)$$

とすると、

$$P(x_{t+1}|x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left\{-\frac{(x_{t+1} - x_t)^2}{2\sigma_w^2}\right\} \quad (70)$$

$$P(y_t|x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left\{-\frac{(y_t - x_t)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \quad (71)$$

$$(72)$$

さらに、

$$P(x_t|\hat{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}} \exp\left\{-\frac{(x_t - \hat{x}_t)^2}{2\sigma_a^2(t)}\right\} \quad (73)$$

と書くことにすると、単位時間が経過したあとの粒子の位置 x_{t+1} は、

$$\begin{aligned} P(x_{t+1}|\hat{x}_t) &= \int P(x_{t+1}|x_t)P(x_t|\hat{x}_t) dx_t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}} \int \exp\left\{-\frac{(x_{t+1} - x_t)^2}{2\sigma_w^2} - \frac{(x_t - \hat{x}_t)^2}{2\sigma_a^2(t)}\right\} dx_t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_w^2 + \sigma_a^2(t))}} \exp\left\{-\frac{(x_{t+1} - \hat{x}_t)^2}{2(\sigma_w^2 + \sigma_a^2(t))}\right\} \end{aligned} \quad (74)$$

ここで、

$$\sigma_b^2(t+1) = \sigma_w^2 + \sigma_a^2(t) \quad (75)$$

とおくと、(74) 式は、

$$P(x_{t+1}|\hat{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(t+1)}} \exp\left\{-\frac{(x_{t+1} - \hat{x}_t)^2}{2\sigma_b^2(t+1)}\right\} \quad (76)$$

と書けるので、

$$P(y_{t+1}|\hat{x}_t) = \int P(y_{t+1}|x_{t+1})P(x_{t+1}|\hat{x}_t) dx_{t+1}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} P(x_{t+1}|\hat{x}_t, y_{t+1}) &\propto P(y_{t+1}|x_{t+1})P(x_{t+1}|\hat{x}_t) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{(y_{t+1}-x_{t+1})^2}{2\sigma_v^2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{(x_{t+1}-\hat{x}_t)^2}{2\sigma_b^2(t+1)}\right\} \end{aligned} \quad (77)$$

となる。すなわち、

$$P(x_{t+1}|\hat{x}_t, y_{t+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t+1)}} \exp\left\{-\frac{(x_{t+1}-\hat{x}_{t+1})^2}{2\sigma_a^2(t+1)}\right\} \quad (78)$$

$$= P(x_{t+1}|\hat{x}_{t+1}) \quad (79)$$

を得る。ここで、

$$\frac{1}{\sigma_a^2(t+1)} = \frac{1}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_b^2(t+1)} \quad (80)$$

$$\frac{\hat{x}_{t+1}}{\sigma_a^2(t+1)} = \frac{y_{t+1}}{\sigma_v^2} + \frac{\hat{x}_t}{\sigma_b^2(t+1)} \quad (81)$$

である。(80)式より、

$$\sigma_a^2(t+1) = \frac{\sigma_v^2 \sigma_b^2(t+1)}{\sigma_v^2 + \sigma_b^2(t+1)} \quad (82)$$

を得る。

イノベーションを、 $e_{t+1} = y_{t+1} - \hat{x}_t$ とおくと、(81)式の \hat{x}_{t+1} は、

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + K(t) e_{t+1} \quad (83)$$

となる。ここで、

$$K(t) = \frac{\sigma_b^2(t+1)}{\sigma_b^2(t+1) + \sigma_v^2} \quad (84)$$

4.3.1 定常カルマンフィルター

定常状態では、 $\sigma_a^2(t)$ も $\sigma_b^2(t)$ も時間に依らない定数となる。 $\sigma_b^2(t) = p$ とにおいて、(75)式と(82)式を書き直すと、

$$p = \sigma_w^2 + \sigma_a^2 \quad (85)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_v^2 p}{p + \sigma_v^2} \quad (86)$$

これらの式から σ_a^2 を消去すると、

$$p^2 - \sigma_w^2 p - \sigma_v^2 \sigma_w^2 = 0 \quad (87)$$

を得る。この解は、 $p > 0$ だから、

$$p = \frac{\sigma_w^2 + \sqrt{(\sigma_w^2)^2 + 4\sigma_v^2 \sigma_w^2}}{2} \quad (88)$$

$\sigma_v^2 = 0$ の場合

この場合は、 $y_t = x_t$ 、すなわち、観測値は誤差を含まない。

$$\sigma_b^2 = \sigma_w^2 \quad (89)$$

$$\sigma_a^2 = 0 \quad (90)$$

なので、 $K = 1$ となり、

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + y_{t+1} - \hat{x}_t = y_{t+1} \quad (91)$$

すなわち、

$$\hat{x}_{t+1} = y_{t+1} \quad (92)$$

という全く自明の結果を得る。

$\sigma_w^2 = 1$, $\sigma_v^2 = 2$ の場合

(87) 式は、

$$p^2 - p - 2 = 0 \quad (93)$$

となり、 $p = \sigma_b^2 = 2$ を得る。すると、 $K = \frac{1}{2}$ となるので、

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + \frac{1}{2}(y_{t+1} - \hat{x}_t) \quad (94)$$

すなわち、

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{1}{2}(y_{t+1} + \hat{x}_t) \quad (95)$$

$$= \frac{1}{2}y_{t+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (y_t + \hat{x}_{t-1}) \quad (96)$$

$$= \frac{1}{2}y_{t+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 y_t + \left(\frac{1}{2}\right)^3 (y_{t-1} + \hat{x}_{t-2}) \quad (97)$$

$$\dots\dots \quad (98)$$

$$= \frac{1}{2}y_{t+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 y_t + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} (y_1 + \hat{x}_0) \quad (99)$$

$$= \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{2}\right)^{t+2-i} y_i + \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} \hat{x}_0 \quad (100)$$

または、

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^t \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1-i} y_i + \left(\frac{1}{2}\right)^t \hat{x}_0 \quad (101)$$

を得る。