ベイズ決定

1　ベイズの定理

確率変数 θ_i, の生起確率を $p(\theta_i)$ とし、事象 z が結果として起こったと分かったとき、それが θ_i, のもとで起こった

$$p(\theta_i|z) = \frac{p(z|\theta_i)p(\theta_i)}{\sum_i p(z|\theta_i)p(\theta_i)}$$

標本のデータ z は、パラメータ θ に依存するとすると、z が与えられたもとでの θ の事後分布は、$p(\theta_i|z)$ で与えられる。

2　ベイズ推定

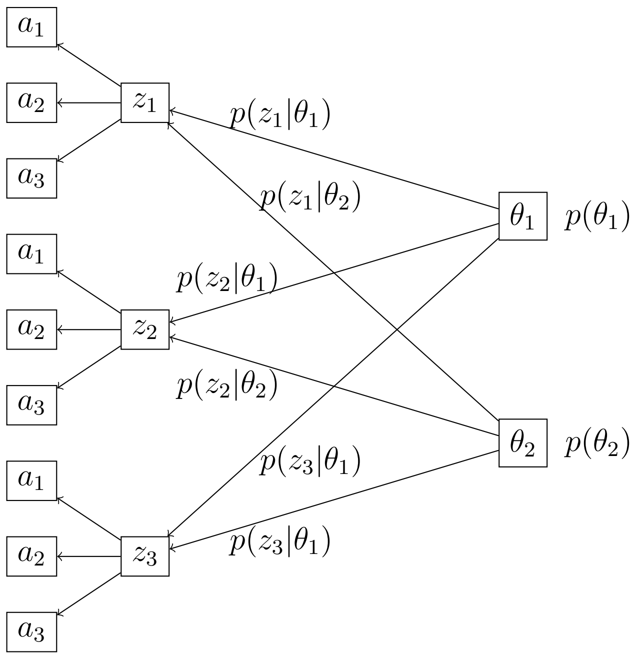
パラメータ θ の値として一つの値 (行動 a) を事後分布による損失 $L(\theta,\ a)$ の期待値を最小にするように決定すること。

3　統計的決定理論

例として、ネルソン氏の雨の問題 (Mr. Nelson's rain problem)
(Chernoff & Moses "Elementary Decision Theory", John Wiley & Sons, 1959.)
を考える。

	(晴天用) a_1	(レインコート) a_2	(レインコート・シューズ・傘) a_3
(晴) θ_1	0	1	3
(雨) θ_2	5	3	2

	(高)	（中）	(低)
	z_1	z_2	z_3
(晴) θ_1	0.60	0.25	0.15
(雨) θ_2	0.20	0.30	0.50



$$
\begin{aligned}
p(z_1) &= p(z_1|\theta_1)p(\theta_1) + p(z_1|\theta_2)p(\theta_2) \\
&= 0.60p(\theta_1) + 0.20p(\theta_2)
\end{aligned}
$$

ベイズの定理より

$$
p(\theta_i|z_1) = \frac{p(z_1|\theta_i)p(\theta_i)}{p(z_1)}, \quad i = 1, 2
$$

ここで、

$$
r(a_i; z_1) = a_i p(z_1|\theta_1)p(\theta_1) + a_i p(z_1|\theta_2)p(\theta_2)
$$

とおくと、$p(\theta_1) + p(\theta_2) = 1$ だから、

$$
\begin{aligned}
r(a_1; z_1) &= 0 \times 0.60 \times p(\theta_1) + 5 \times 0.20 \times p(\theta_2) = 1 - p(\theta_1), \\
r(a_2; z_1) &= 1 \times 0.60 \times p(\theta_1) + 3 \times 0.20 \times p(\theta_2) = 0.6, \\
r(a_3; z_1) &= 3 \times 0.60 \times p(\theta_1) + 2 \times 0.20 \times p(\theta_2) = 0.4 + 1.4p(\theta_1).
\end{aligned}
$$

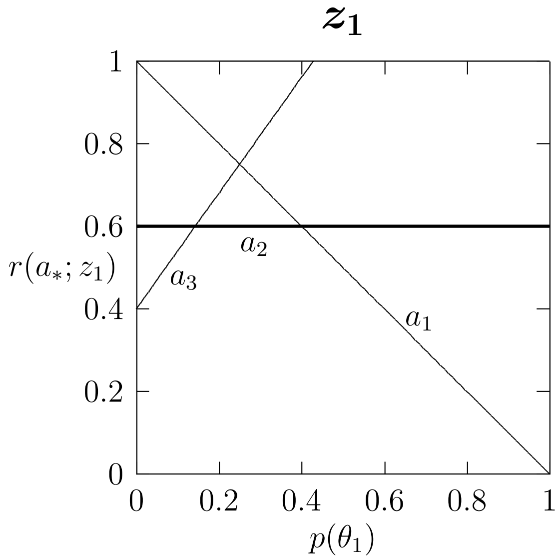
ここで、z_1 だった場合の損失を

$$\ell_1(a,\ z_1) = min\{r(a_1, z_1),\ r(a_1, z_1),\ r(a_1, z_1)\}$$

とおくと、損失 $\ell(a, z_1)$ が最小となる $a_i(i = 1,\ \cdots,\ 3)$ は、

$$0 \leq p(\theta_1) \leq \frac{1}{4}\text{ならば、}a_3$$
$$\frac{1}{4} \leq p(\theta_1) \leq \frac{2}{5}\text{ならば、}a_2$$
$$\frac{2}{5} \leq p(\theta_1) \leq 1\text{ ならば、}a_1$$

となる。



結果が z_2 だった場合には、

$$\begin{aligned} p(z_2) &= p(z_2|\theta_1)p(\theta_1) + p(z_2|\theta 2)p(\theta_2) \\ &= 0.25p(\theta_1) + 0.30p(\theta_2) \end{aligned}$$

$$r(a_i; z_2) = a_i p(z_2|\theta_1)p(\theta_1) + a_i p(z_2|\theta_2)p(\theta_2)$$

だから、

$$\begin{aligned} r(a_1; z_2) &= = 0 \times 0.25 \times p(\theta_1) + 5 \times 0.30 \times p(\theta_2) = 1.5 - 1.5p(\theta_1) \\ r(a_2; z_2) &= = 1 \times 0.25 \times p(\theta_1) + 3 \times 0.30 \times p(\theta_2) = 0.9 - 0.65p(\theta_1) \\ r(a_3; z_2) &= = 3 \times 0.25 \times p(\theta_1) + 2 \times 0.30 \times p(\theta_2) = 0.6 + 0.15p(\theta_1) \end{aligned}$$

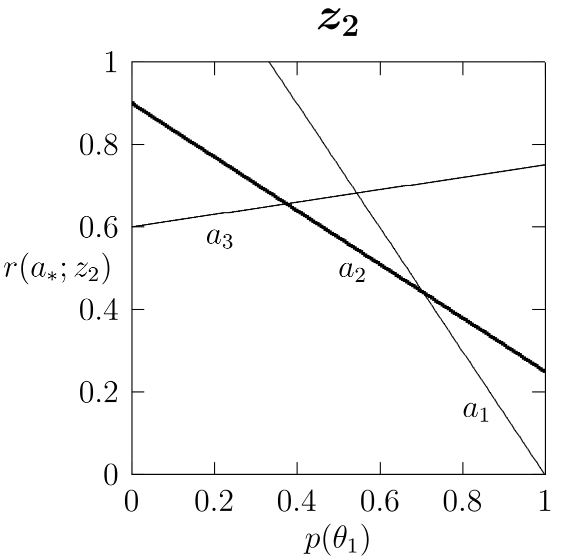
ここで、z_2 だった場合の損失を

$$\ell_2(a,\ z_2) = min\{r(a_1, z_2),\ r(a_1, z_2),\ r(a_1, z_2)\}$$

とおくと、損失 $\ell(a, z_2)$ が最小となる $a_i(i = 1,\ \cdots,\ 3)$ は、

$$
\begin{aligned}
&0 \le p(\theta_1) \le \frac{3}{8}\ \text{ならば、}a_3 \\
&\frac{3}{8} \le p(\theta_1) \le \frac{12}{17}\text{ならば、}a_2 \\
&\frac{12}{17} \le p(\theta_1) \le 1\ \text{ならば、}a_1
\end{aligned}
$$

となる。



結果が z_3 だった場合には、

$$
\begin{aligned}
p(z_3) &= p(z_3|\theta_1)p(\theta_1) + p(z_3|\theta 2)p(\theta_2) \\
&= 0.15p(\theta_1) + 0.50p(\theta_2)
\end{aligned}
$$

$$
r(a_i; z_3) = a_i p(z_3|\theta_1)p(\theta_1) + a_i p(z_3|\theta_2)p(\theta_2)
$$

だから、

$$
\begin{aligned}
r(a_1; z_3) &= = 0 \times 0.15 \times p(\theta_1) + 5 \times 0.50 \times p(\theta_2) = 2.5 - 2.5p(\theta_1) \\
r(a_2; z_3) &= = 1 \times 0.15 \times p(\theta_1) + 3 \times 0.50 \times p(\theta_2) = 1.5 - 1.35p(\theta_1) \\
r(a_3; z_3) &= = 3 \times 0.15 \times p(\theta_1) + 2 \times 0.50 \times p(\theta_2) = 1.0 - 0.55p(\theta_1)
\end{aligned}
$$

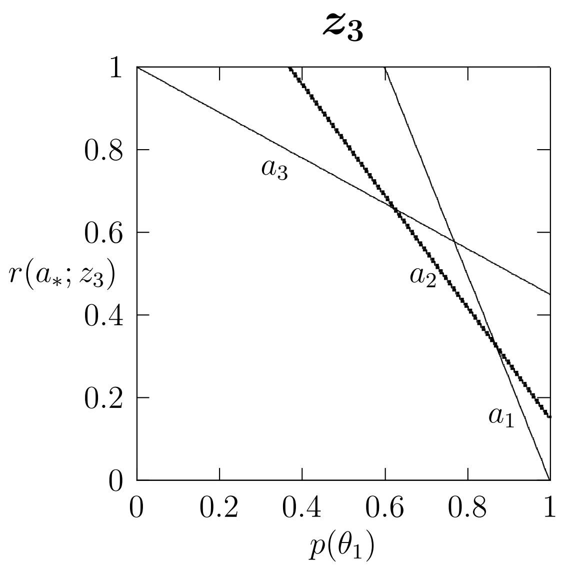
ここで、z_2 だった場合の損失を

$$
\ell_3(a,\ z_3) = min\{r(a_1, z_3),\ r(a_1, z_3),\ r(a_1, z_3)\}
$$

とおくと、損失 $\ell(a, z_3)$ が最小となる $a_i(i=1,\ \cdots,\ 3)$ は、

$$
\begin{aligned}
&0 \leq p(\theta_1) \leq \frac{5}{8} \quad \text{ならば、} a_3 \\
&\frac{5}{8} \leq p(\theta_1) \leq \frac{10}{13} \text{ならば、} a_2 \\
&\frac{10}{13} \leq p(\theta_1) \leq 1 \text{ ならば、} a_1
\end{aligned}
$$

となる。



損失の期待値は、

$$
\mathscr{L}(s) = \ell_1(a,\ z_1) + \ell_2(a,\ z_2) + \ell_3(a,\ z_3)
$$

で与えられる。従って、ネルソン氏の戦略は、与えられた $p(\theta)$ の下で $\mathscr{L}(s)$ が最小となるような s を観測された z_i から求めることにある。

範囲	z_1	z_2	z_3
$0 \leq p(\theta_1) \leq \frac{1}{4}$	a_3	a_3	a_3
$\frac{1}{4} \leq p(\theta_1) \leq \frac{3}{8}$	a_2	a_3	a_3
$\frac{3}{8} \leq p(\theta_1) \leq \frac{2}{5}$	a_2	a_2	a_3
$\frac{2}{5} \leq p(\theta_1) \leq \frac{5}{8}$	a_1	a_2	a_3
$\frac{5}{8} \leq p(\theta_1) \leq \frac{12}{17}$	a_1	a_2	a_2
$\frac{12}{17} \leq p(\theta_1) \leq \frac{10}{13}$	a_1	a_1	a_2
$\frac{10}{13} \leq p(\theta_1) \leq 1$	a_1	a_1	a_1