演習問題２-２ 解答

問題１　$\boldsymbol{a}=(-2,\ 3)$,　$\boldsymbol{b}=(6,\ -2)$,　$\boldsymbol{c}=(1,\ 2)$ とする。

(1)　$s\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{c}$ と並行になるように、実数 s の値を定めよ。

$s\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{c}$ より、$(-2s+6,\ 3s-2)=(k,\ 2k)$. すなわち、$-4s+12=3s-2$.　$\therefore\ s=2$

(2)　$\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{c}$ と垂直になるように、実数 t の値を定めよ。

$(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ より、$-2+6t+2(3-2t)=0$.　$\therefore t=-2$

問題２　ベクトル $\boldsymbol{a}$,　$\boldsymbol{b}$ について、$|\boldsymbol{a}|=1$,　$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$ とする。

(1)　内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ。

$7=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=4-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ より、 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{3}{2}$

(2)　$\boldsymbol{a}$,　$\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\sqrt{3}\cos\theta=-\dfrac{3}{2}$ より、 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　$\therefore\ \theta=\dfrac{5\pi}{6}$

応用問題

問題３ $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}-b|=4$ とする。

(1)　内積 $\boldsymbol{a}\cdot b$ を求めよ。

$4^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot b+|\boldsymbol{b}|^2=4+9-2\boldsymbol{a}\cdot b$ より、$\boldsymbol{a}\cdot b=-\dfrac{3}{2}$

(2)　$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ を最小にする実数 t の値 t_0 とその最小値を求めよ。

$$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2=t^2|\boldsymbol{b}|^2+2t\boldsymbol{a}\cdot b+|\boldsymbol{a}|^2=9t^2-3t+4=9\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{15}{4}$$

ゆえに、$t=\dfrac{1}{6}$ のとき、$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ は最小となり、その値は $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

(3)　(2) の t_0 に対して、$\boldsymbol{a}+t_0\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直であることを確かめよ。

$\left(\boldsymbol{a}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{6}\right)\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\dfrac{|\boldsymbol{b}|^2}{6}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{6}=0$ ゆえに、$\left(\boldsymbol{a}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{6}\right)\perp\boldsymbol{b}$