群論の初歩

1　n 次対称群 S_n

n コのものの順列 $(a, b, c, \cdots)$ を $(a', b', c', \cdots)$ と並べ替える操作を

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \cdots \\ a' & b' & c' & \cdots \end{pmatrix}$$

と表す。

3 次対称群 S_3 の場合について具体的に表すと、

$$I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

となる。

1.1　マトリックス表現 (置換行列 (permutation marix))

順列 (a, b, c) を (a', b', c') に並べ替える操作を、

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

と表す。

行列

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

を置換行列という。

順列 (a, b, c) の 6 個の置換を具体的に表すと、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1}$$

ゆえに、置換行列は、

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{2}$$

基底ベクトルは、

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}b\\a\\c\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a\\c\\b\end{pmatrix}. \tag{3}$$

2 部分群

3 次対称群 S_3

S_3 も自分自身の部分群である。

3 次巡回群 C_3

$$n_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad n_2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad n_3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{4}$$

基底ベクトルは、

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix}. \quad \text{または、} \quad \boldsymbol{y_1} = \begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y_2} = \begin{pmatrix}a\\c\\b\end{pmatrix}. \quad \boldsymbol{y_3} = \begin{pmatrix}b\\a\\c\end{pmatrix}, \tag{5}$$

最初の基底ベクトルの 3 つ組 $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3})$ に、変換 $g_1 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ を施すと、

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\\b\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a\\c\end{pmatrix}.$$

と 2 番目の基底ベクトルの 3 つ組 $(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3})$ が得られる。

これらをまとめて書くと、

$$g_1\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

変換、$g_2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ や $g_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ の場合も同様の関係が導かれる。

$$g_2\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{y_3}, \qquad g_2\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{y_1}, \qquad g_2\boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{y_2}, \tag{7}$$

$$g_3\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{y_2}, \qquad g_3\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{y_3}, \qquad g_3\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{y_1}. \tag{8}$$

また、関係式

$$\boldsymbol{x}_2 = n_2\boldsymbol{x}_1$$

は、(6) 式を用いて書き直すと、

$$g_1^{-1}\boldsymbol{y_2} = n_2 g_1^{-1}\boldsymbol{y}_1$$

すなわち、

$$\boldsymbol{y_2} = n_3\boldsymbol{y}_1 = g_1 n_2 g_1^{-1}\boldsymbol{y}_1$$

ゆえに、

$$n_3 = g_1 n_2 g_1^{-1}$$

を得る。（今の場合は、$g_i^{-1} = g_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$）

　同様にして

$$n_3 = g_2 n_2 g_2^{-1}, \qquad n_3 = g_3 n_2 g_3^{-1}$$

も成り立つことが分かる。

　一般に、群 G の部分群 N が**正規部分群 (normal subgroup)** であるとは、G の任意の要素 g について、

$$N = gNg^{-1}$$

が成り立つことを表す。従って、3 次巡回群 C_3 は 3 次対称群 S_3 の正規部分群である。

恒等置換と互換

I. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

基底ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}. \qquad \text{または、} \qquad \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \qquad \text{または、} \qquad \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}. \tag{9}$$

II. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

基底ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}. \qquad \text{または、} \qquad \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}, \qquad \text{または、} \qquad \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}. \tag{10}$$

III. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

基底ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}. \qquad \text{または、} \qquad \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \qquad \text{または、} \qquad \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}. \tag{11}$$