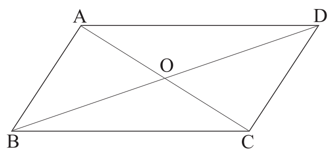
2019 年度代数学 I　試験問題解答

問題 1 平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} = \vec{b}$　(2) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$
(3) $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}$　(4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{b} - \vec{a}$
(5) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\vec{a} - \vec{b}$　(6) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -2\vec{a}$



問題 2 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $3\vec{x} - 4\vec{a} = 6\vec{b} + \vec{x}$　$\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

(2) $\vec{x} + 5\vec{a} - 3\vec{b} = 3\left(\vec{x} - \vec{a} - 3\vec{b}\right)$　$\vec{x} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$

問題 3 $\vec{a} = (2,\ 1)$, $\vec{b} = (2,\ -3)$ であるとき、次のベクトルを成分で表せ。また、その大きさを求めよ。

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (4,\ -2)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$　(2) $\vec{a} - \vec{b} = (0,\ 4)$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$
(3) $3\vec{a} + \vec{b} = (8,\ 0)$, $|3\vec{a} + \vec{b}| = 8$　(4) $2\vec{b} - \vec{a} = (2,\ -7)$, $|2\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{53}$

問題 4 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積と、それらのなす角 θ を求めよ。ただし、$0 \leqq \theta < \pi$ とする。

(1) $\vec{a} = (1,\ -1,\ 0)$, $\vec{b} = (1,\ -2,\ 1)$　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 2 + 0 = 3$, $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より、$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(2) $\vec{a} = (1,\ -1,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 3,\ 2)$　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 3 + 2 = 0$, $\cos\theta = 0$ より、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\vec{a} = (2,\ -3,\ 1)$, $\vec{b} = (-1,\ -2,\ 3)$　$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 6 + 3 = 7$, $\cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{1}{2}$
より、$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

問題 5　ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、$|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 9$ とする。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
$81 = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 61 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}$ より、$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ とするとき、$\cos\theta$ を求めよ。
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = 15\cos\theta = -5$ より、$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$.

問題 6 次の計算を行い、答えを $a+bi$ の形で表せ。ただし、$a,\ b$ は実数とする。

(1) $(7+3i)+(3-4i)\quad = 10-i$

(2) $(2-i)-(5-2i)\quad = -3+i$

(3) $(2+3i)(3-2i)\quad = 6+6+(9-4)i = 12+5i$

(4) $\dfrac{1}{(-2+i)(1-3i)}\quad = \dfrac{1}{1+7i} = \dfrac{1-7i}{(1+7i)(1-7i)} = \dfrac{1-7i}{50}$

(5) $\sqrt{-5+12i}\quad \sqrt{-5+12i} = a+bi$ とおいて、両辺を 2 乗すると、$a^2-b^2=-5,\ ab=6$
これを解くと、$a=\pm 2,\ b=\pm 3$ と求まるので、$\sqrt{-5+12i} = \pm(2+3i)$

問題 7 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $\sqrt{3}+i\quad = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}\quad = \dfrac{(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

問題 8 方程式　$z^3 = -2\sqrt{2}$　の解を求めよ。
$z^3 = 2^{\frac{3}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^{\frac{3}{2}}e^{(2n+1)\pi i}\quad (n=0,1,2)$ より、$z = \sqrt{2}\,e^{\left(\frac{1}{3}+\frac{2n}{3}\right)\pi i}$
すなわち、$z = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}\,i}{2},\ -\sqrt{2}$

問題 9 $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{12}$ の値を求めよ。

$$\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{12} = 2^{12}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12} = 2^{12}\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{12} = 2^{12} = 4096$$

問題 10 ド・モアブルの公式を用いて、三角関数の 2 倍角の公式を導け。

$$\begin{aligned}\cos 2\theta + i\sin 2\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2\\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta\\ &= = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

左辺と右辺の実数部分と虚数部分を比較して、

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\\ \sin 2\theta &= 2\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$