# 幾何分布と指数分布
# Geometric and Exponential Distribution

緑川章一[*]

### 幾何分布

$$\mathrm{P}_G(x) = pq^{x-1}, \quad p+q=1, \quad x=1,2,3,\cdots$$

### 幾何分布の連続極限としての指数分布

$t = \dfrac{x}{n}$ と置き、$n \to \infty$ の極限を考える。その時、

$$f(t)\,\Delta t = \frac{1}{n} f(t) = pq^{nt-1}$$

となる $f(t)$ を求める。

$r = q^n$ とおくと、

$$p = 1 - q = 1 - r^{1/n}$$

だから、

$$\frac{1}{n} f(t) = \left(1 - r^{1/n}\right) r^{t-1/n} \tag{1}$$

$$= \left(r^{-1/n} - 1\right) r^t \tag{2}$$

ところで、$r = \exp(\ln r)$ だから、

$$r^{-1/n} = e^{-\frac{\ln r}{n}} \approx 1 - \frac{\ln r}{n}$$

ゆえに、

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} n\left(r^{-1/n} - 1\right) r^t = -\ln r\, e^{t\ln r}$$

ここで、

$$\lambda = -\ln r$$

とおくと、

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

を得る。これは指数分布を表す。

[*]Shoichi Midorikawa

**指数分布から幾何分布へ**
　指数分布

$$\mathrm{P}_E(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

から幾何分布 $\mathrm{P}_G(n)$ を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_G(n) &= \lambda \int_{n-1}^{n} e^{-\lambda t}\, dt \\
&= \left[-e^{-\lambda t}\right]_{n-1}^{n} \\
&= e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} \\
&= e^{-\lambda(n-1)} \left(1 - e^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

ここで、

$$p = 1 - e^{-\lambda}, \quad q = e^{-\lambda}$$

と置くと、

$$\mathrm{P}_G(n) = pq^{n-1}$$

を得る。
**再び幾何分布から指数分布へ**
　指数分布 $\mathrm{P}_E(t) = f(t)$ を幾何分布を用いて、

$$\mathrm{P}_G(n) = pq^{n-1} = q^{n-1} - q^n = \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$$

で定義しよう。
　この両辺を $n$ で微分する。
　左辺は、

$$\frac{d}{dn} pq^{n-1} = p\frac{d}{dn} e^{(n-1)\ln q} = \ln q\ pq^{n-1} = -q^n \ln q + q^{n-1} \ln q$$

右辺は、

$$\frac{d}{dn} \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt = f(n) - f(n-1)$$

すなわち、

$$-q^n \ln q + q^{n-1} \ln q = f(n) - f(n-1)$$

ゆえに、

$$f(n) = -q^n \ln q$$

が成り立つ。
　ここで、$n$ の代わりに $t$ を用いると、

$$f(t) = -q^t \ln q$$

さらに、$\lambda = -\ln q$ とおくと、$q = e^{-\lambda}$ となるので、

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

を得る。

## 平均と分散

<u>幾何分布の平均と分散</u>

$$\begin{aligned}
\mu_G &= \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = \frac{1}{p} \\
\sigma_G^2 &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2pq^{x-1} - \mu_G^2 = \left(\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}
\end{aligned}$$

指数分布の平均と分散

$$\begin{aligned}
\mu_E &= \int_0^{\infty} tf(t)\,dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{np} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1-e^{-\lambda/n})}
\end{aligned}$$

ここで、

$$p = 1 - q = 1 - e^{-\lambda/n} \approx \frac{\lambda}{n}$$

だから、

$$\mu_E = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t^2 f(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{x=1}^{\infty} x^2pq^{x-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$