ガンマ関数とベータ関数

　ガンマ関数とベータ関数について、簡単にまとめておく。まず、ガンマ関数は、次の式で定義される。

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx \tag{1}$$

部分積分をおこなうと、

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= -\int_0^\infty x^{n-1}\left(e^{-x}\right)'\,dx \\ &= \Big[-x^{n-1}e^{-x}\Big]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}\,dx \\ &= (n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}\,dx\end{aligned}$$

より

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \tag{2}$$

特別な場合として、

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1, \tag{3}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi} \tag{4}$$

を得る。パラメータ n が正整数の場合には、(2) 式と (3) 式より、

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

となるので、階乗の積分表示となっていることがわかる。

　次に 2 つのガンマ関数 $\Gamma(m)$ と $\Gamma(n)$ の積について考えてみよう。

$$\begin{aligned}\Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}\,dx \int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1}y^{n-1}e^{-(x+y)}\,dx\,dy\end{aligned}$$

ここで、$z = x + y$ とおくと、

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty dz \int_0^z dx\ x^{m-1}(z-x)^{n-1}e^{-z}$$

更に、$x = zt$ とおくと、

$$\begin{aligned}\Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^\infty z^{m+n-1}e^{-z}\,dz \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \\ &= \Gamma(m+n)B(m,\ n)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$B(m,\ n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$$

をベータ関数と言う。特に、$m = n = 1/2$ の場合には、(3) 式と (4) より、

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \pi$$

を得る。