

## 2項分布と正規分布 (Binomial and Gaussian distributions)

2項分布 (binomial distribution)  $B(n, p)$  は、

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{(n-x)} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}, \quad \text{但し、} q = 1 - p \quad (1)$$

と表される。ここで、変数  $n, x$  ( $n \gg x$ ) が十分大きい場合を考える。

見通しをよくするために、(1)式において  $y = n - x$  と置いて、 $y$  についての和をとる。

$$p(x) = \sum_y \frac{n!}{x!y!} p^x q^y \delta_{x+y, n}$$

ここで、 $\delta_{x+y, n}$  は、クロネッカーのデルタである。スターリングの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \quad x! = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}, \quad y! = \sqrt{2\pi y} y^y e^{-y}$$

を用いて、 $p(x)$  を書き直すと、

$$\begin{aligned} p(x) &\sim \sum_y \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{x}{n}\right)^{-x-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{n}\right)^{-y-\frac{1}{2}} p^x q^y \delta_{x+y, n} \\ &= \sum_y \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(\frac{x}{np}\right)^{-x-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{nq}\right)^{-y-\frac{1}{2}} \delta_{x+y, n} \end{aligned}$$

ここで、 $x = t + np$ 、 $y = u + nq$  とおいて、変数  $x, y$  の代わりに  $t, u$  を用いることにすると、

$$p(t + np) = f(t) \sim \sum_u \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left(1 + \frac{t}{np}\right)^{-(np+t+\frac{1}{2})} \left(1 + \frac{t}{nq}\right)^{-(nq+u+\frac{1}{2})} \delta_{t+u, 0}$$

さらに、 $np \gg t \gg 1/2$ 、 $np \gg u \gg 1/2$  として展開すると、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{np}\right)^{-(np+t+\frac{1}{2})} &= \exp \left\{ - \left( np + t + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{t}{np} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \left( np + t + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{t}{np} - \frac{t^2}{2(np)^2} + \dots \right) \right\} \\ &\simeq \exp \left( -t - \frac{t^2}{2np} \right) \end{aligned}$$

同様に、

$$\left(1 + \frac{u}{nq}\right)^{-(nq+u+\frac{1}{2})} \simeq \exp \left( -u - \frac{u^2}{2nq} \right)$$

と近似できるので、

$$f(t) = \sum_u \delta_{t+u,0} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(- (t+u) - \frac{t^2}{2np} - \frac{u^2}{2nq}\right)$$

と書ける。もはや  $t$  も  $u$  も連続変数として扱えるので、 $\sum_u \delta_{t+u,0}$  も  $\int du \delta(t+u)$  で置き換える。ここで、 $\delta(t+u)$  は、ディラックのデルタ関数である。すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \int du \delta(t+u) \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(- (t+u) - \frac{t^2}{2np} - \frac{u^2}{2nq}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(- \frac{t^2}{2np} - \frac{t^2}{2nq}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(- \frac{t^2}{2npq}\right) \end{aligned}$$

となる。最後に、 $\sigma^2 = npq$  と置いて、

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(- \frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

これは、平均値が 0、分散が  $\sigma^2$  の正規分布 (ガウス分布) である。