ワイブル分布 (Weibull distributions)

緑川章一 *

1 生存関数

$\tau \geq 0$ を寿命を表す確率変数とし、その確率密度関数を $f(\tau)$ とする。寿命 τ が与えられた値 t よりも長くなる割合を表す関数を生存関数 (survival function) と言い、

$$S(t) = \mathrm{P}(\tau > t) = \int_t^\infty f(\tau)d\tau \tag{1}$$

で定義される。

一方、累積分布関数 (cumulative distribution function)$F(t)$ は、

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(\tau)d\tau \quad (2)\\ &= 1 - S(t) \quad (3)\end{aligned}$$

で与えられる。

累積分布関数 $F(t)$ を微分すると、確率密度関数 $f(t)$ が得られる。

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \tag{4}$$

ハザード関数 (hazard function)$h(t)$ とは、

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{P(t \leq \tau \leq t + \Delta\tau | \tau \geq t)}{\Delta\tau} \\ &= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{P(t \leq \tau \leq t + \Delta\tau)}{\Delta\tau}}{P(\tau > t)} \\ &= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} f(t)\, d\tau}{\displaystyle\int_t^\infty f(\tau)d\tau} \end{aligned}$$

すなわち、

$$h(t) = \frac{f(t)}{\displaystyle\int_t^\infty f(\tau)\, d\tau} \tag{5}$$

で定義される。

---

* Shoichi Midorikawa

(1) 式より、

$$S(t) = \int_t^\infty f(\tau)\,d\tau, \qquad S'(t) = -f(t)$$

だから、

$$h(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

を得る。この式の t を τ に書き換えて、式の変形をおこなうと、

$$\frac{dS(\tau)}{S(\tau)} = -h(\tau)d\tau$$

この式を 0 から t まで積分する。$S(0) = 1$ なので、

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^t h(\tau)d\tau\right\}$$

をえる。

$$H(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

を累積ハザード関数 (cumulative hazard function) という。

2 指数分布とワイブル分布

指数分布

指数分布の確率密度関数は、

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{6}$$

で与えられる。

生存関数は、

$$S(t) = \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau = e^{-\lambda t}$$

累積分布関数は、

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

である。

(5) 式に (6) 式を代入すると、

$$h(t) = \lambda$$

を得る。

また、

$$\frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

と指数分布の確率密度関数が得られる。

ワイブル分布

指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ において、$t = x^n$ とおき、変数 x の分布 $f_X(x)$ を考える。

$$f_X(x) = \lambda \int_0^\infty \delta\left(x - \sqrt[n]{t}\right) e^{-\lambda t}\, dt \tag{7}$$

この積分を求めるに当り、$\varphi(t) = x - \sqrt[n]{t}$ とおいて、$t = x^n$ の周りで展開する。$\varphi(x^n) = 0$ だから、

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi'(x^n)(t - x^n) + \cdots \\ &= -\frac{1}{n} x^{-(n-1)}(t - x^n) + \cdots\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\delta\left(x - \sqrt[n]{t}\right) = n x^{n-1} \delta(t - x^n)$$

これを、(1) 式に代入して、t についての積分をおこなう。

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \lambda n x^{n-1} \int_0^\infty \delta(t - x^n) e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \lambda n x^{n-1} e^{-\lambda x^n}\end{aligned} \tag{8}$$

これを、ワイブル分布 (Weibull distribution) と言う。

ワイブル分布の一般的な表現は、(2) 式で、$n = \alpha,\ \lambda = 1/\beta^\alpha$ と置いたものである。

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \tag{9}$$

累積分布関数から

指数関数の累積分布関数 $F(t)$ は、

$$F(t) = 1 - e^{\lambda t}$$

で与えられる。

ここで、$t = x^n$ とおくと、

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x^n}$$

この式を x で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dF_X(x)}{dx} &= \lambda n x^{n-1} e^{-\lambda x^n} \\ &= f_X(x)\end{aligned}$$

をワイブル分布の確率密度関数 (8) 式が得られる。

平均

ワイブル分布の平均は、(9) 式を

$$\mu = \int_0^\infty x F_X(x)\, dx$$

に代入して求める。

$$\mu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^\infty x \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}\, dx$$

ここで、$u=(x/\beta)^\alpha$ とおくと、

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} &= \alpha u\, e^{-u} \\ dx &= \frac{\beta}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, du \end{aligned}$$

だから

$$\mu = \beta \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u}\, du$$

ここで、

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\, du$$

を用いると、

$$\mu = \beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

と表すことができる。

分散

分散は、

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 f_X(x)\, dx - \mu^2$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 f_X(x)\, dx &= \alpha\beta \int_0^\infty \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha+1} e^{-(x/\beta)^\alpha}\, dx \\ &= \beta^2 \int_0^\infty u^{\frac{2}{\alpha}} e^{-u}\, du \\ &= \beta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

となるので、

$$\sigma^2 = \beta^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$$

を得る。

3 商の分布

確率変数 x と y は、それぞれ、α の値は同じで β の値が異なるワイブル分布、

$$f_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta_1}\right)\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta_1)^\alpha}, \quad f_2(y) = \left(\frac{\alpha}{\beta_2}\right)\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha-1} e^{-(y/\beta_2)^\alpha}$$

に従うものとする。このとき、２つの確率変数の比 $z = x/y$ の分布を考える。
注意！　比 $z = (x/\beta_1)/(y/\beta_2)$ の分布に書き直す。

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty \delta(z - x/y) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty y\delta(x - yz) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty y f_1(yz) f_2(y)\, dy \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta_1\beta_2} \int_0^\infty y \left(\frac{yz}{\beta_1}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha-1} e^{-(yz/\beta_1)^\alpha} e^{-(y/\beta_2)^\alpha}\, dy \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、$u = (y/\beta_2)^\alpha$ と置くと、(10) 式は、

$$f_Z(z) = \alpha \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} z\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty u \exp\left\{-\left[\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} z\right)^\alpha + 1\right] u\right\} du \tag{11}$$

さらに、$r = (\beta_2/\beta_1)^\alpha,\ v = (rz^\alpha + 1)u$ とおくと、

$$f_Z(z) = \alpha \frac{rz^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2} \int_0^\infty v e^{-v}\, dv$$

ところが、

$$\int_0^\infty v e^{-v}\, dv = 1$$

なので、

$$f_Z(z) = \frac{r\alpha z^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2} \tag{12}$$

となる。
　更に、$w = rz^\alpha$ とおくと、

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_0^\infty \delta(w - rz^\alpha) \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2}\, dz \\ &= \frac{1}{(w+1)^2} \end{aligned}$$

を得る。これは、自由度 (2, 2) の F 分布である。すなわち、確率変数 $w = \left(\dfrac{x/\beta_1}{y/\beta_2}\right)^\alpha$ は、自由度 (2, 2) の F 分布に従う。