ポアソン過程とガンマ分布
(Poisson Process and Gamma Distribution)

緑川章一 *

1　ポアソン分布

事象 S の生起回数は、単位時間あたり平均 λ 回であるとしよう。この事象を分析するために、単位時間を n 等分する。各微小区間において、事象 S は、たかだか 1 回起るだけである。その確率を p とすると、その値は、λ/n である。単位時間に事象 S が k 回生起する確率は、2 項分布で与えられ、

$$\begin{aligned} P(k) &= {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

である。ここで、$n \to \infty$ の極限を考えると、$np = \lambda$ は一定なので、

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}(np)^k \left\{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}\right\}^{\lambda} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

となる。そこで、新たに確率関数

$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{1}$$

を定義し、これをポアソン分布と呼ぶ。

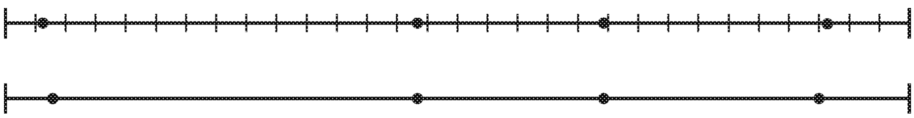

図 1: 2 項分布とポアソン分布

---

*Shoichi Midorikawa

2　指数分布

次に、事象 S が起ってから、t 時間後に再び事象 S が起こる確率を求めよう。

単位時間を n 分割した場合に、2 つの事象の間の微小区間の個数が x である確率は、幾何分布に従い、

$$P(x) = p(1-p)^x$$

で与えられる。ここで、$t = x/n,\ \Delta t = 1/n$ なので、$P(x)$ を $P(t)\Delta t$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} P(t)\Delta t &= \frac{\lambda}{n}\left\{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}\right\}^{\lambda t} \\ &= \lambda\left\{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}\right\}^{\lambda t}\Delta t \end{aligned}$$

最後に、$n \to \infty$ の極限をとると、指数う分布

$$P(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{2}$$

を得る。

3　ポアソン過程

セクション 1 では、単位時間に事象が k 回起こる確率を考えた。これを一般化して、任意の時間間隔 $[0, t]$ に拡張するには、λ を λt に置き換えて、

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \tag{3}$$

確率過程とみなしたものがポアソン過程である。

推移確率と微分方程式

まれな事象 S は、平均すると、単位時間に λ 回起こるとしよう。微小時間 h の間に事象 S が 1 度も起こらない確率を $p_0(h)$ と書くと、1 度以上起こる確率 $1 - p_0(h)$ は、高次の項を無視すると λh である。すなわち、

$$1 - p_0(h) = \lambda h + o(h)$$

となる。しかしながら、S は稀な事象なので、短い時間間隔 h の間に事象 S が 2 回以上起こることは実際にはありえないと言える。

いま、h は十分小さな値として、時間 $t + h$ が経過した段階で、事象 S の生起回数が k であったとする。これは、時間が t 経過した段階で事象 S が k 回発生し、その後の時間 h の経過で何も起こらなかったか、時間が t 経過した段階で事象 S が $k-1$ 発生し、その後の時間 h の経過の間に事象が 1 回起こったかのいずれかであるので、

$$p_k(t+h) = p_k(t)(1-\lambda h) + p_{k-1}(t)\lambda h + o(h) \qquad (k \geqq\ 1)$$

が成り立つ。これを書き換えると、

$$\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h}=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t)$$

ここで、$h\to 0$ の極限をとると、

$$p_k'(t)=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t) \qquad (k \geqq\ 1) \tag{4}$$

$k=0$ のときは、$p_{-1}(0)$ は、あり得ないので、

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t) \tag{5}$$

が成り立つ。

次に、微分差分方程式 (4) と (5) を解こう。まず、母関数、

$$\begin{aligned}P(t,\ s) &= p_0(t)+p_1(t)s+p_2(t)s^2+p_3(t)s^3+\cdots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}p_k(t)s^k\end{aligned}$$

を定義する。すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(t,\ s) &= p_0'(t)+p_1'(t)s+p_2'(t)s^2+p_3'(t)s^3+\cdots\\ \\ &= -\lambda p_0(t)+\left[-\lambda p_1(t)+\lambda p_0(t)\right]s+\left[-\lambda p_2(t)+\lambda p_1(t)\right]s^2+\cdots\\ &= -\lambda\left[p_0(t)+p_1(t)s+p_2(t)s^2+p_3(t)s^3+\cdots\right]\\ &\quad +\lambda s\left[p_0(t)+p_1(t)s+p_2(t)s^2+p_3(t)s^3+\cdots\right]\\ &= -\lambda(1-s)P(t,\ s)\end{aligned}$$

すなわち、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda(1-s)\right)P(t,\ s)=0$$

この方程式は、容易に解けて、

$$\begin{aligned}P(t,\ s) &= e^{-\lambda(1-s)t}\\ &= e^{-\lambda t}e^{\lambda st}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}s^k\end{aligned}$$

ゆえに、

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

を得る。

4　ガンマ分布

確率変数 $t_1,\ t_2, \cdot,\ t_n$ は、互いに独立で、同じ指数分布 (2) に従うものとする。このとき、確率変数 $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ の従う分布は、

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \lambda^n \int \delta(z - t_1 - t_2 - \cdots - t_n) e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_n)}\, dt_1 dt_2 \cdots dt_n \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_0^t dt_n \int_0^{t-t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t-(t_4+\cdots+t_n)} dt_3 \int_0^{t-(t_3+t_4+\cdots+t_n)} dt_2 \end{aligned}$$

で与えられる。この積分は容易に計算できて、

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \tag{6}$$

を得る。これを、ガンマ分布と言う。詳しくは、「ガンマ分布とベータ分布」を参照のこと。

5　ポアソン過程とガンマ分布

ガンマ分布 $f_n(t) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$ は、事象 S が n 回発生するまでの時間が t の確率密度関数を表す。そこで、関数 $f_n(t)$ を $t > T$ について積分したものは、事象 S が n 回起こるまでの時間 t が T よりも長い確率である。これは、区間 $[0,\ T]$ における事象 S の生起回数が n 未満である確率に等しいので、

$$\int_T^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}$$

が成り立つ。このことは、左辺の積分を、部分積分を用いて実行することで容易に確かめることができる。

実際、

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_T^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t}\, dt &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_T^\infty t^{n-1} \left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right)' dt \\ &= \frac{(\lambda T)^{n-1} e^{-\lambda T}}{(n-1)!} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_T^\infty t^{n-2} e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \frac{(\lambda T)^{n-1} e^{-\lambda T}}{(n-1)!} + \frac{(\lambda T)^{n-2} e^{-\lambda T}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{(\lambda T) e^{-\lambda T}}{1!} + \frac{\lambda}{0!} \int_T^\infty e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \frac{(\lambda T)^{n-1} e^{-\lambda T}}{(n-1)!} + \frac{(\lambda T)^{n-2} e^{-\lambda T}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{(\lambda T) e^{-\lambda T}}{1!} + \frac{e^{-\lambda T}}{0!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} \end{aligned}$$

となる。