賽は投げられた
(The dice are cast.)

緑川章一*

確率論は、サイコロ遊びから始まった。理想的なサイコロを振って、i の目が出る確率は、

$$P(x) = \frac{1}{6} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$$

である。複数のサイコロを振って、出た目の和の確率を求める。

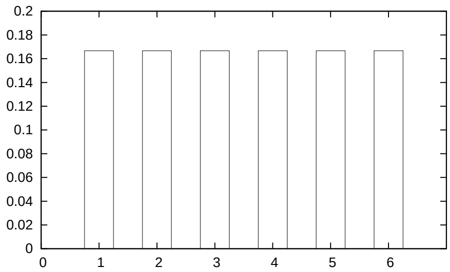

図 1: 理想的なサイコロの目の確率

(a) 2 コの場合

2 コのサイコロを振った場合に、それぞれのサイコロの出た目を、$i,\ j$ とする。その和を s とし、その確率を $f_S(s)$ と書くことにすると、

$$f_2(s) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\delta_{s,i+j} \tag{1}$$

で与えられる。ここで、$\delta_{s,i+j}$ は、クロネッカーのデルタで、$s = i + j$ ならば 1、それ以外は 0 である。まず、(1) 式で j についての和をとる。これは、$j = s - i$ を満たすときは 1、そうでなければ 0 である。ところが、$1 \leqq j \leqq 6$ なので、$1 \leqq s - i \leqq 6$。すなわち、$s - 6 \leqq i \leqq s - 1$。しかも $1 \leqq i \leqq 6$ だから、$2 \leqq s \leqq 7$ の場合は $2 \leqq i \leqq s - 1$、$7 \leqq s \leqq 12$ の場合は $s - 6 \leqq i \leqq 6$ である。ゆえに、

$$f_2(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{36}\displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} 1 = \dfrac{s-1}{36} & (2 \leqq \mathrm{s} \leqq 7 \text{ の場合}) \\ \dfrac{1}{36}\displaystyle\sum_{i=s-6}^{6} 1 = \dfrac{13-s}{36} & (7 \leqq \mathrm{s} \leqq 12 \text{ の場合}) \end{cases} \tag{2}$$

*Shoichi Midorikawa

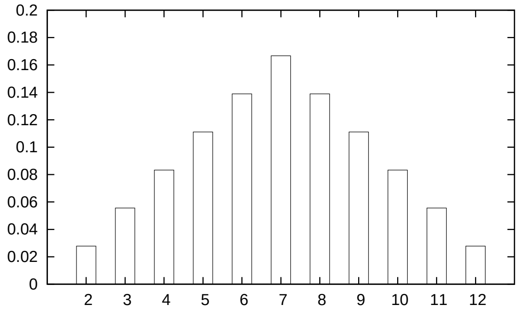

図 2: 2 コのサイコロの目の和の確率

(b)　3 コの場合

2 コのサイコロを振った場合に、それぞれのサイコロの出た目を、i, j, k とする。その和を s とし、その確率を $f_S(s)$ と書くことにすると、

$$f_3(s) = \frac{1}{216}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\delta_{s,i+j+k} \tag{3}$$

計算は、2 コの場合と同じようにやれば良い。まず、k についての和をとる。$k = s - i - j$ だから、$1 \leqq s - i - j \leqq 6$。すなわち、$s - i - 6 \leqq j \leqq s - i - 1$。ところが、$1 \leqq j \leqq 6$ なので、$1 \leqq s - i - 1$。すなわち、$i \leqq s - 2$。また、$s - i - 6 \leqq 6$ より、$s - 12 \leqq i$。ゆえに、$s - 12 \leqq i \leqq s - 2$。

次に、$s - i - 6$ と 1 を比較して (これは、$s - i - 1$ と 6 を比較することと同じである)、

(1) $i \leqq s - 8$ のとき、$s - i - 6 \leqq j \leqq 6$
(2) $s - 7 \leqq i$ のとき、$1 \leqq j \leqq s - i - 1$

ただし、$s - 8 \leqq 0$ のとき、すなわち $s \leqq 8$ のとき、(1) を満たす i は存在しない。また、$6 \leqq s - 7$、すなわち $s \geqq 13$ のとき、(2) を満たす i は存在しない。

$3 \leqq s \leqq 8$ の場合 $1 \leqq i \leqq s - 2$ だから、

$$f_3(s) = \frac{1}{216}\sum_{i=1}^{s-2}\sum_{j=1}^{s-i-1} 1 = \frac{1}{216}\sum_{i=1}^{s-2}(s - i - 1) = \frac{(s-1)(s-2)}{432} \tag{4a}$$

$8 \leqq s \leqq 13$ の場合 $1 \leqq i \leqq 6$ だから、

$$\begin{aligned} f_3(s) &= \frac{1}{216}\Big\{\sum_{i=1}^{s-8}\sum_{j=s-i-6}^{6} 1 + \sum_{i=s-7}^{6}\sum_{j=1}^{s-i-1} 1\Big\} \\ &= \frac{1}{216}\Big\{\sum_{i=1}^{s-8}(13 - s + i) + \sum_{i=s-7}^{6}(s - i - 1)\Big\} \\ &= \frac{1}{432}\Big\{(s-8)(19-s) + (s-1)(14-s)\Big\} \\ &= -\frac{s^2 - 21s + 83}{216} \end{aligned} \tag{4b}$$

13 ≦ s ≦ 18 の場合 $s-12 \leqq i \leqq 6$ だから、

$$f_3(s) = \frac{1}{216}\sum_{i=s-12}^{6}\sum_{j=s-i-6}^{6} 1 = \frac{1}{216}\sum_{i=s-12}^{6}(13-s+i) = \frac{(19-s)(20-s)}{432} \tag{4c}$$

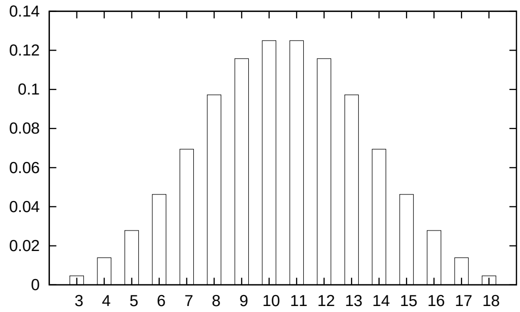

図 3: 3 コのサイコロの目の和の確率

(c) 4 コの場合

(2) 式を用いると、

$$\begin{aligned} f_4(s) &= \sum_{k=2}^{12}\sum_{l=2}^{12} f_2(k)\, f_2(l)\, \delta_{s,k+l} \\ &= \sum_{k=2}^{12} f_2(k)\, f_2(s-k) \end{aligned}$$

となる。ところで、$2 \leqq l \leqq 12$ より、$s-12 \leqq k \leqq s-2$。一方、$2 \leqq k \leqq 12$ だから $s-12 \leqq 12$ かつ $2 \leqq s-2$、すなわち、$4 \leqq s \leqq 24$。振ったサイコロの数は 4 だから、この結果は当然である。

この和は、2 つの場合に分けられる。$2 \leqq s-2 \leqq 12$、すなわち、$4 \leqq s \leqq 14$ の場合と、$2 \leqq s-12 \leqq 12$、すなわち、$14 \leqq s \leqq 24$ の場合である。

$$f_4(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=2}^{s-2} f_2(k)\, f_2(s-k) & (4 \leqq \mathrm{s} \leqq 14 \text{ の場合}) \\ \displaystyle\sum_{k=s-12}^{12} f_2(k)\, f_2(s-k) & (14 \leqq \mathrm{s} \leqq 24 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$4 \leqq s \leqq 14$ は、さらに、$4 \leqq s \leqq 9$ の場合と $9 < s \leqq 14$ の場合に分けられる。

4 ≦ s ≦ 9 の場合

$$f_4(s) = \sum_{k=2}^{s-2}\left(\frac{k-1}{36}\right)\left(\frac{s-k-1}{36}\right) = \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{7776} \tag{5a}$$

$9 < s \leqq 14$ の場合

$$
\begin{aligned}
f_4(s) &= \sum_{k=2}^{s-8} f_2(k)\, f_2(s-k) + \sum_{k=s-7}^{7} f_2(k)\, f_2(s-k) + \sum_{k=8}^{s-2} f_2(k)\, f_2(s-k) \\
&= \sum_{k=2}^{s-8} \left(\frac{k-1}{36}\right)\left(\frac{13-s+k}{36}\right) + \sum_{k=s-7}^{7} \left(\frac{k-1}{36}\right)\left(\frac{s-k-1}{36}\right) + \sum_{k=8}^{s-2} \left(\frac{13-k}{36}\right)\left(\frac{s-k-1}{36}\right) \\
&= \frac{-s^3+30s^2-251s+670}{2592} \qquad (5b)
\end{aligned}
$$

$14 \leqq s \leqq 24$ は、さらに、$14 \leqq s < 19$ の場合と $19 \leqq s \leqq 24$ の場合に分けられる。

$14 \leqq s < 19$ の場合

$$
\begin{aligned}
f_4(s) &= \sum_{k=s-12}^{6} f_2(k)\, f_2(s-k) + \sum_{k=7}^{s-7} f_2(k)\, f_2(s-k) + \sum_{k=s-6}^{12} f_2(k)\, f_2(s-k) \\
&= \sum_{k=s-12}^{6} \left(\frac{k-1}{36}\right)\left(\frac{13-s+k}{36}\right) + \sum_{k=7}^{s-7} \left(\frac{13-k}{36}\right)\left(\frac{13-s+k}{36}\right) + \sum_{k=s-6}^{12} \left(\frac{13-k}{36}\right)\left(\frac{s-k-1}{36}\right) \\
&= \frac{s^3-54s^2+923s-4790}{2592} \qquad (5c)
\end{aligned}
$$

$19 \leqq s \leqq 24$ の場合

$$
f_4(s) = \sum_{k=s-12}^{12} \left(\frac{13-k}{36}\right)\left(\frac{13-s+k}{36}\right) = \frac{(27-s)(26-s)(25-s)}{7776} \qquad (5d)
$$

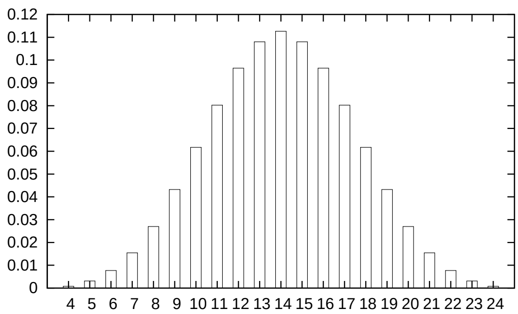

図 4: ４コのサイコロの目の和の確率