離散確率分布
Discrete Probability Distributions

緑川章一 *

確率変数 X は、離散的な値 $x = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ をとるものとし、その確率関数 $p(x)$ と書くことにする。

1 Fourier 変換

関数 $f(x)$ は、$[-\pi, \pi]$ で定義されているとする。この関数のフーリエ展開を

$$f(x) = \sum_n a_n e^{inx}$$

と表すと、その係数 a_n は、

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

より求まる。実際、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_m a_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = a_n$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = \delta_{m,n} \tag{1}$$

を用いた。

2 特性関数

確率関数 $p(x)$ をフーリエ係数とする関数

$$f(t) = \cdots + p(-2)e^{-2it} + p(-1)e^{-it} + p(0) + p(1)e^{it} + p(2)e^{2it} + \cdots = \sum_x p(x) e^{ixt}$$

*Shoichi Midorikawa

を確率関数 $p(x)$ の特性関数 (characteristic function) という。確率関数 $p(n)$ は、特性関数の積分

$$p(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

から求まる。

3　確率変数の和の分布

確率変数 X の離散確率分布を $p_A(X)$、確率変数 Y の離散確率分布を $p_B(Y)$ とする。また、$p_A(X)$，$p_B(Y)$ の特性関数を、それぞれ、$f_A(t)$, $f_B(t)$ と表すと、

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \sum_x p_A(x)e^{ixt} \\ f_B(t) &= \sum_y p_B(y)e^{iyt} \end{aligned}$$

である。このとき、$Z = X + Y$ の確率関数 $P(Z)$ は、

$$P(z) = \sum_x \sum_y \delta_{z,x+y} p_A(x)p_B(y) \tag{2}$$

ここで、クロネッカーのデルタのフーリエ展開表示

$$\delta_{z,x+y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x+y-z)t}\,dt$$

を用いると、

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2\pi}\sum_x \sum_y \int_{-\pi}^{\pi} dt e^{i(x+y-z)t} p_A(x)p_B(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-izt}\left(\sum_x p_A(x)e^{ixt}\right)\left(\sum_y p_B(y)e^{iyt}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-izt} f_A(t)f_B(t) \end{aligned}$$

すなわち、

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-izt} f_A(t)f_B(t) \tag{3}$$

で与えられる。ここで、$f_A(t)f_B(t)$ が $P(Z)$ の特性関数である。

次に、X_1, X_2, $\cdots$, X_n は独立な確率変数で、それぞれ同一の確率分布 $p(X)$ に従うものとする。このとき

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

の確率関数は、確率変数 X の特性関数を $f(t)=\sum_x p(x)e^{ixt}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{x_1}\cdots\sum_{x_n}\delta_{z,x_1+\cdots+x_n}p(x_1)\cdots p(x_n)\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_n}\int_{-\pi}^{\pi}dt\,e^{i(x_1+\cdots x_n-z)t}\,p(x_1)\cdots p(x_n)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt\,e^{-izt}\left(\sum_{x_1}p(x_1)e^{ix_1t}\right)\cdots\left(\sum_{x_n}p(x_n)e^{ix_nt}\right)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
P(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt\,e^{-izt}\,f^n(t)
$$

で与えられることが分かる。

3.1 ベルヌーイ試行

結果は、成功か失敗かのように、2 つに 1 つの場合について考える。確率変数 X の値は、事象 E が起こる場合を 0，起こらない場合を 1 とする。それらの確率を $P(0)=p$，失敗の確率を $P(1)=q=1-p$ と書こう。この場合の特性関数は、

$$
f(t)=p+qe^{it}
$$

である。

ベルヌーイ試行列

ベルヌーイ試行を独立に n 回繰り返す場合の特性関数は、$f^n(t)$ で与えられる。

$$
\begin{aligned}
f^n(t) &= \left(p+qe^{it}\right)^n\\
&= \sum_{x=0}^{n}{}_nC_x p^x q^{n-x}e^{ixt}\\
&= \sum_{x=0}^{n}p_n(x)e^{ixt}
\end{aligned}
$$

ゆえに、

$$
p_n(x)={}_nC_x p^x q^{n-x}
$$

と二項分布になる。

3.2　ポアソン分布

確率分布がポアソン分布 $p(n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ の場合

$$
\begin{aligned}
f(t) &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{-\lambda(1-e^{it})} \\
e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\lambda(1-e^{it})}e^{-imt}\,dt
\end{aligned}
$$

ポアソン確率変数の和

$X_1,\ X_2$ が互いに独立で、各々、パラメータが $\lambda_1,\ \lambda_2$ のポアソン分布に従うものとする。このとき、$Z = X_1 + X_2$ の確率分布は、

$$
P(z) = \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\delta_{z,x_1+x_2}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!}
$$

で与えられる。ここで、(1) を用いると、

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{i(x_1+x_2-z)t}\,e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\int_{-\pi}^{\pi} dt\left(\sum_{x_1=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 e^{it})^{x_1}}{x_1!}\right)\left(\sum_{x_2=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2 e^{it})^{x_2}}{x_2!}\right)e^{-izt} \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\int_{-\pi}^{\pi} dt\,e^{\lambda_1 e^{it}}e^{\lambda_2 e^{it}}\,e^{-izt} \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\int_{-\pi}^{\pi} dt\,e^{(\lambda_1+\lambda_2)e^{it}}\,e^{-izt}
\end{aligned}
$$

ここで、$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{1}{2\pi}e^{-\lambda_s}\int_{-\pi}^{\pi} dt\,e^{\lambda_s e^{it}}\,e^{-izt} \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\lambda_s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_s^k}{k!}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{i(k-z)t} \\
&= e^{-\lambda_s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_s^k}{k!}\delta_{k,z} \\
&= e^{-\lambda_s}\frac{\lambda_s^z}{z!}
\end{aligned}
$$

ゆえに、$z = x_1 + x_2$ の分布は、

$$
P(z) = e^{-\lambda_s}\frac{\lambda_s^z}{z!}, \qquad \text{ここで、} \quad \lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2
$$

普通は、こんな七面倒くさいことはしないで、

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\delta_{z,x_1+x_2}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} \\
&= \sum_{x_1=0}^{z}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{z-x_1}}{(z-x_1)!} \qquad \because\ x_2 = z - x_1 \geqq 0 \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{z!}\sum_{x_1=0}^{z}\frac{z!}{x_1!(z-x_1)!}\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{z-x_1} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}
\end{aligned}
$$

ゆえに、

$$P(z) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}$$

3.3 二項分布

二項分布 $p_n(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$ の場合、特性関数は、

$$f(t) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} e^{ixt} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \left(pe^{it}\right)^x q^{n-x} = \left(pe^{it}+q\right)^n$$

で与えられる。

二項分布に従う確率変数の和

X_1 と X_2 は互いに独立で、それぞれ、確率分布 $p_{n_1}(x_1) = {}_{n_1}C_{x_1}p^{x_1}q^{n_1-x_1}$，$p_{n_2}(x_2) = {}_{n_2}C_{x_2}p^{x_2}q^{n_2-x_2}$

に従うものとする。このとき、$Z = X_1 + X_2$ の確率分布は、

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{x_1=0}^{n_1}\sum_{x_2=0}^{n_2} \delta_{z,x_1+x_2}\ {}_{n_1}C_{x_1} p^{x_1} q^{n_1-x_1}\ {}_{n_2}C_{x_2} p^{x_2} q^{n_2-x_2} \\
&= \sum_{x_1=0}^{n_1}\sum_{x_2=0}^{n_2} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z-x_1-x_2)t}\, dt\ {}_{n_1}C_{x_1} p^{x_1} q^{n_1-x_1}\ {}_{n_2}C_{x_2} p^{x_2} q^{n_2-x_2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(\sum_{x_1=0}^{n_1} {}_{n_1}C_{x_1} (pe^{-it})^{x_1} q^{n_1-x_1}\right)\left(\sum_{x_2=0}^{n_2} {}_{n_2}C_{x_2} (pe^{-it})^{x_2} q^{n_2-x_2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(pe^{-it}+q\right)^{n_1} \ \left(pe^{-it}+q\right)^{n_2}\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(pe^{-it}+q\right)^{n_1+n_2}\ dt \\
&= \sum_{s=0}^{n_1+n_2} {}_{n_1+n_2}C_s\, p^s q^{n_1+n_2-s}\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z-s)t}\, dt \\
&= \sum_{s=0}^{n_1+n_2} {}_{n_1+n_2}C_s\, p^s q^{n_1+n_2-s}\, \delta_{z,s} \\
&= {}_{n_1+n_2}C_z\, p^z q^{n_1+n_2-z}
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$P(z) = {}_{n_1+n_2}C_z\, p^z q^{n_1+n_2-z}$$

3.4 幾何分布

幾何分布 $P(x) = pq^{x-1}$ ただし、$p+q=1,\ x=1,\ 2,\ \cdots$ の特性関数は、

$$f(t) = \sum_{x=1}^{\infty} P(x) e^{ixt} = \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty}\left(qe^{it}\right)^x = \frac{pe^{it}}{(1-qe^{it})}$$

幾何分布に従う確率変数の和

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は独立な確率変数で、それぞれ同一の幾何分布 $P(X)$ に従うものとする。このとき

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

の確率関数は、確率変数 X_i の特性関数を $f(t) = \dfrac{pe^{it}}{(1-qe^{it})}$ とすると、

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-izt}\, f^n(t)\, dt = \frac{p^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}e^{-izt}}{(1-qe^{it})^n}\, dt \tag{4}$$

で与えられる。
　ところで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-s)^n} &= 1+\frac{n}{1!}s+\frac{n(n+1)}{2!}s^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}s^3+\cdots \\ &= \sum_{u=0}^{\infty} {}_{n-1+u}C_u\, s^u\end{aligned}$$

だから、(4) 式は、

$$\begin{aligned}P(z) &= \sum_{u=0}^{\infty} {}_{n-1+u}C_u p^n q^u \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+u-z)t}\,dt \\ &= {}_{z-1}C_{z-n}p^n q^{z-n}\end{aligned}$$

すなわち、

$$P(z) = {}_{z-1}C_{z-n}p^n q^{z-n}$$

ここで、$z=n+k$ とおくと、

$$P(n+k) = {}_{n+k-1}C_k p^n q^k$$

これは、ある事象が n 回成功するまでに k 回の失敗したときの確率である。なぜなら、$n+k$ 回の試行で、n 回の成功と k 回の失敗をしたとすると、その確率は、$p^n q^k$ となる。$n+k$ 回目の試行は成功であるから、それまでの、$n+k-1$ 回の間に k 回の失敗の仕方は、${}_{n+k-1}C_k$ となるからである。
　ところで、

$$\begin{aligned}{}_{n+k-1}C_k p^n q^k &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!}p^n q^k \\ &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-(k-1))}{k!}p^n(-q)^k \\ &= {}_{-n}C_k\left(\frac{1}{p}\right)^{-n-k}\left(-\frac{q}{p}\right)^k\end{aligned}$$

と書けるので、$\mathcal{N}=-n,\ \mathcal{P}=\dfrac{1}{p},\ \mathcal{Q}=-\dfrac{q}{p}$ とおくと、

$${}_{n+k-1}C_k p^n q^k = {}_{\mathcal{N}}C_k \mathcal{P}^{\mathcal{N}-k}\mathcal{Q}^k$$

右辺は、形式的には二項分布の形をしている。ただし、$\mathcal{N}<0$，$\mathcal{Q}<0$ である。また、$p+q=1$ なので $\mathcal{P}+\mathcal{Q}=1$。これを負の二項分布と言う。