# $2$次方程式の整数解

【問題】
$x$の$2$次方程式 $x^2-mnx+m+n=0$（ただし $m,n$ は自然数）で$2$つの解がともに整数となるものは何個あるか。

【解】
$2$つの整数解を $\alpha,\ \beta$ とおくと、解と係数の関係から、

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= m+n & (1)\\ \alpha+\beta &= mn & (2) \end{aligned}$$

$m,n$ は、自然数だから、$m \geqq 1,\ n \geqq 1.$ ゆえに、

$$\begin{aligned} \alpha\beta &\geqq 2 & (3)\\ \alpha+\beta &\geqq 1 & (4) \end{aligned}$$

となり、$\alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1$、すなわち、$\alpha$も$\beta$も自然数であることが分かる。
　ここで、

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-\alpha-\beta+1=m+n-mn+1=-(m-1)(n-1)+2 \tag{5}$$

だから、

$$(\alpha-1)(\beta-1)-1=-\Big[(m-1)(n-1)-1\Big] \tag{6}$$

が成り立つ。また、$\alpha,\ \beta,\ m,\ n$ は、すべて自然数だから、

$$\begin{aligned} (\alpha-1)(\beta-1)-1 &\geqq -1 & (7)\\ (m-1)(n-1)-1 &\geqq -1 & (8) \end{aligned}$$

が成り立つ。
　(6) 式と (8) 式より、

$$(\alpha-1)(\beta-1)-1 \leqq 1 \tag{9}$$

これと、(7) 式を組み合わせると、

$$-1 \leqq (\alpha - 1)(\beta - 1) - 1 \leqq 1 \tag{10}$$

となる。これは、$(\alpha - 1)(\beta - 1) - 1$ の取り得る値は、$-1,\ 0,\ 1$ の 3 通りであること、すなわち、$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 0,\ 1,\ 2$ を表す。

**$(\boldsymbol{\alpha} - 1)(\boldsymbol{\beta} - 1) = 0$ の場合**　(5) 式より $(m-1)(n-1) = 2,$ これは、$m = 3,\ n = 2$ または、$m = 2,\ n = 3$ を表す。このとき、$\alpha = 5,\ \beta = 1$、または、$\alpha = 1, \beta = 5$ となる。

**$(\boldsymbol{\alpha} - 1)(\boldsymbol{\beta} - 1) = 1$ の場合**　これは、$\alpha = 2,\ \beta = 2$ を意味する。(5) 式より、$(m-1)(n-1) = 1$ である。これより、$m,\ n$ の値は、$m = n = 2$ と求まる。

**$(\boldsymbol{\alpha} - 1)(\boldsymbol{\beta} - 1) = 2$ の場合**　このとき、$\alpha = 2,\ \beta = 3$ または、$\alpha = 3,\ \beta = 2$ となる。また、$(m-1)(n-1) = 0$ より、$m = 1$ または $n = 1$。$m = 1$ のときは、(2) 式より、$n = 5$。$n = 1$ のときは、$m = 5$ となる。

以上より、問題の 2 次方程式の整数解は、$(1,\ 5),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)$ の 3 個である。