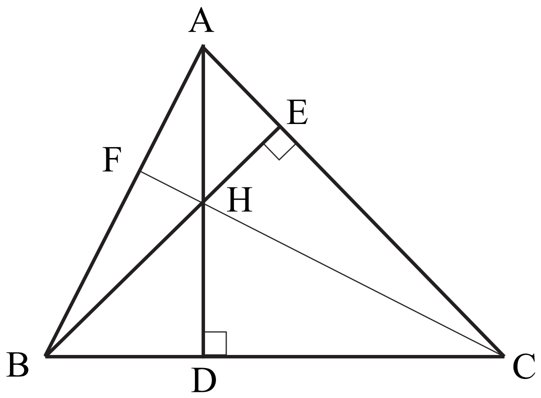
垂心の存在証明

三角形 ABC の点 A から辺 BC に下した垂線の足を D，点 B から辺 CA に下ろした垂線の足を E とし、2 本の垂線の交点を H とする。2 点点 C と H を通る直線と辺 AB の交点を F とする。このとき、

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{CF}$$

となることを証明すればよい。



証明

三角形 BDH と三角形 BEC は相似である。ゆえに、

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BE}}$$

これを、DH について解くと、

$$\mathrm{DH} = \frac{\mathrm{BD} \cdot \mathrm{EC}}{\mathrm{BE}}$$

両式を DC で割ると、

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{BD} \cdot \mathrm{EC}}{\mathrm{DC} \cdot \mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} \cdot \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BE}} \tag{1}$$

ところが、$\triangle$ADC と $\triangle$BEC は相似なので、$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}$。すなわち、$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BE}} = 1$。これを、(1) 式に代入すると、

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}$$

これは、$\triangle$ABD と $\triangle$CHD は相似であることを表している。 したがって、$\triangle$BCF もまた、それらと相似な直角三角形である。ゆえに、

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{CF}$$

は成り立つ。