軌跡としての楕円の方程式

2 つの点 $(c,\ 0)$ と $(-c,\ 0)$ からの距離の和が一定の値 $2a$ となる点 $(x,\ y)$ の軌跡の方程式を求める。

条件より、

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \tag{1}$$

両辺を**そのまま** 2 乗すると、

$$2(x^2+y^2+c^2)+2\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}=4a^2 \tag{2}$$

この両辺を 2 で割って、$s=x^2+y^2+c^2$ とおき、左辺の平方根の中を展開すると、

$$s+\sqrt{s^2-4c^2x^2}=2a^2 \tag{3}$$

左辺の s を右辺に移項すると、

$$\sqrt{s^2-4c^2x^2}=2a^2-s \tag{4}$$

もう一度、両辺を 2 乗すると、

$$s^2-4c^2x^2=4a^4-4a^2s+s^2 \tag{5}$$

整理すると、

$$a^2s-c^2x^2=a^4 \tag{6}$$

ここで、$s=x^2+y^2+c^2$ を代入して整理すると、

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{7}$$

両辺を $a^2(a^2-c^2)$ で割ると、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{8}$$

となる。ここで、$b^2=a^2-c^2$ とおくと、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{9}$$

を得る。