チェバの定理とメネラウスの定理

1　チェバの定理

△ABC の頂点 A, B, C と、三角形の内部の点 O を結ぶ直線 AO, BO, CO が辺 BC, CA, AB と、それぞれ点, P, Q, R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

が成り立つ。

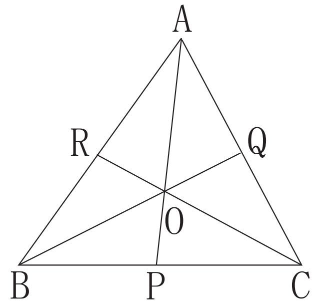

図 1

証明

メネラウスの定理からチェバの定理を証明する。

点 P を通り CR に平行な直線と辺 AB の交点を S とする。

$$\mathrm{CP}:\mathrm{BC}=\mathrm{RS}:\mathrm{RB}$$

だから、

$$\mathrm{RS}=\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BC}}\cdot\mathrm{RB}$$

さらに、

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{AR}}$$

だから、

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{CP}\cdot\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}\cdot\mathrm{BC}}$$

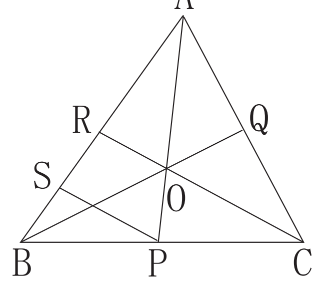

図 2

これを書き換えると、

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}} \cdot \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}} = 1 \tag{1}$$

となる。これを、**メネラウスの定理**という。それを確かめるには、図1から不要な線分を取り除いて、図3のように書き直してみると良い。

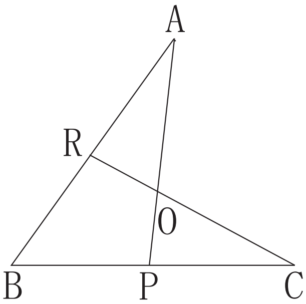

図3

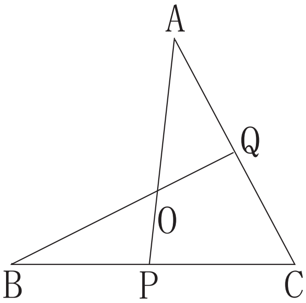

図4

次に、図1から 図4を切り出して、メネラウスの定理を適用すると、

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BP}} \cdot \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}} = 1 \tag{2}$$

となる。

(2) 式より、

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \tag{3}$$

ここで、CB を BC と、AQ と QA と、QC を CQ と書き直した。
(3) 式を (1) 式に代入して、CP を PC と書き直すと、

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} \cdot \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1$$

が得られる。