

2021 年度 CG 基礎数学追再試験問題解答

問 1. 次の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} & (3) \cos 150^\circ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & (4) \sin 150^\circ &= \frac{1}{2} \\
 (5) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} & (6) \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & (7) \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & (8) \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

問 2. 2次元座標系における変換について、次の問に答えよ。

- (1) 点 (x_P, y_P) を原点のまわりに角 θ だけ回転した点を (x', y') とすると、 (x', y') は (x_P, y_P) と θ を用いてどのように表されるか。教科書 p.018 [3] 回転参照

$$\begin{aligned}
 x' &= x_P \cos \theta - y_P \sin \theta, \\
 y' &= x_P \sin \theta + y_P \cos \theta
 \end{aligned}$$

- (2) 点 (x_P, y_P) を直線 $y = x$ に関して鏡映変換して得られる点を (x', y') とすると、 (x', y') は (x_P, y_P) を用いてどのように表されるか。

教科書 p.018 [4] 鏡映と p.019 1-3-3 合成変換とアフィン変換を参照

- (a) 鏡映線 $y = x$ が y 軸に一致するように点 (x_P, y_P) を原点 O のまわりに 45° 回転させる。

$$\begin{aligned}
 x_R &= x_P \cos 45^\circ - y_P \sin 45^\circ = \frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}} \\
 y_R &= x_P \sin 45^\circ + y_P \cos 45^\circ = \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

- (b) (x_R, y_R) を y 軸に関する鏡映変換を行うと、 $(x'_R, y'_R) = (-x_R, y_R)$ となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 x'_R &= -x_R = -\frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}} \\
 y'_R &= y_R = \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

- (c) 鏡映軸が $y = x$ となるように、 (x'_R, y'_R) を原点 O のまわりに -45° 回転する。

$$\begin{aligned}
 x' &= x'_R \cos(-45^\circ) - y'_R \sin(-45^\circ) \\
 &= -\frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= y_P \\
 y' &= x'_R \sin(-45^\circ) + y'_R \cos(-45^\circ) \\
 &= -\frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= x_P
 \end{aligned}$$

ゆえに、 $x' = y_P$, $y' = x_P$ を得る。

- (3) 点 (x_P, y_P) を直線 $y = -x$ に関して鏡映変換して得られる点を (x', y') とすると、 (x', y') は (x_P, y_P) を用いてどのように表されるか。

- (a) 鏡映線 $y = -x$ が y 軸に一致するように点 (x_P, y_P) を原点 O のまわりに -45° 回転させる。

$$x_R = x_P \cos(-45^\circ) - y_P \sin(-45^\circ) = \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}}$$

$$y_R = x_P \sin(-45^\circ) + y_P \cos(-45^\circ) = \frac{-x_P + y_P}{\sqrt{2}}$$

(b) (x_R, y_R) を y 軸に関する鏡映変換を行うと、 $(x'_R, y'_R) = (-x_R, y_R)$ となる。すなわち、

$$x'_R = -x_R = -\frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}}$$

$$y'_R = y_R = \frac{-x_P + y_P}{\sqrt{2}}$$

(c) 鏡映軸が $y = -x$ となるように、 (x'_R, y'_R) を原点 O のまわりに 45° 回転する。

$$\begin{aligned} x' &= x'_R \cos 45^\circ - y'_R \sin 45^\circ \\ &= -\frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-x_P + y_P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= -y_P$$

$$\begin{aligned} y' &= x'_R \sin 45^\circ + y'_R \cos 45^\circ \\ &= -\frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-x_P + y_P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= -x_P$$

ゆえに、 $x' = -y_P$, $y' = -x_P$ を得る。

(4) 点 $(\sqrt{3}, 1)$ を原点のまわりに 60° 回転した点の座標を求めよ。

(3) において、 $(x_P, y_P) = (\sqrt{3}, 1)$, $\theta = 60^\circ$ とおくと、

$$x' = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$y' = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 2$$

ゆえに、 $(x', y') = (0, 2)$

(5) 点 $(5, 3)$ を直線 $y = x$ に関して鏡映変換して得られる点の座標を求めよ。

$(x_P, y_P) = (5, 3)$ とする。(4) より、 $(x', y') = (3, 5)$

(6) 点 $(8, 7)$ を点 $(3, 2)$ のまわりに 90° 回転した点の座標を求めよ。

(a) 点 $(3, 2)$ が原点 O にくるように平行移動 $x_T = x - 3$, $y_T = y - 2$ をすると、点 $(8, 7)$ は、 $(5, 5)$ に移る。

(b) 点 $(5, 5)$ を原点のまわりに 90° 回転すると、

$$x_R = 5 \cos 90^\circ - 5 \sin 90^\circ = -5$$

$$y_R = 5 \sin 90^\circ + 5 \cos 90^\circ = 5$$

(c) 原点 O が $(3, 2)$ となるように、平行移動 $x' = x_R + 3$, $y' = y_R + 2$ を行うと、

$$x' = x_R + 3 = -5 + 3 = -2$$

$$y' = y_R + 2 = 5 + 2 = 7$$

ゆえに、 $(x', y') = (-2, 7)$

問 3. 視点 C を原点とする左手座標系 $O - xyz$ を考え、平面 $z = f$ を投影面とする。投影面上の $O' - x'y'z'$ 座標系を座標中心 O' が z 軸との交点と一致し、座標軸 x' , y' をそれぞれ x 軸, y 軸と平行となるように選ぶ。3次元空間内の点 (x_P, y_P, z_P) を投影面に投影したときの座標を (x'_P, y'_P) として、以下の問に答えよ。

教科書 p.021 1-3-4 投影変換参照

(1) 視距離 $f = 25$ の場合、点 $(32, 20, 100)$ の投影面における座標 (x'_P, y'_P) を求めよ。

$(x, y, z) = (32, 20, 100)$ とおくと、

$$x'_P = \frac{f}{z} \cdot x, \quad y'_P = \frac{f}{z} \cdot y$$

より、

$$x'_P = \frac{25}{100} \cdot 32 = 8, \quad y'_P = \frac{25}{100} \cdot 20 = 5$$

ゆえに、 $(x'_P, y'_P) = (8, 5)$

- (2) 平行投影の場合、点 $(32, 20, 100)$ の投影面における座標 (x'_P, y'_P) を求めよ。

平行投影においては、

$$(x'_P, y'_P) = (x, y) = (32, 20)$$

問 4. 次の問いに答えよ。

- (1) $152.4\text{mm} \times 101.6\text{mm}$ の写真を 150dpi で標準化した場合、デジタル画像の画素数はいくらになるか。ただし、 $1\text{インチ} = 25.4\text{mm}$ とする。

$$\left(\frac{152.4}{25.4} \times 150\right) \times \left(\frac{101.6}{25.4} \times 150\right) = 900 \text{ 画素} \times 600 \text{ 画素}$$

- (2) 大きさが横 $1,280$ 画素 \times 縦 720 画素 のカラー画像がある。各画素は、R, G, B それぞれ 256 レベルの諧調を持っている。画像データ量は何バイトになるか。ただし、画像データは圧縮されていないものとする。

$$1,280 \times 720 \times 3 = 2,764,800 \text{ バイト}$$

- (3) R, G, B 各色が 6 ビットの画素地で表される場合、表現できる色数はいくつになるか。

$$2^6 \times 2^6 \times 2^6 = 2^{18} = 1,024 \times 256 = 262,144 \text{ 色}$$

問 5. 各面が正五角形である正多面体の頂点、稜線、面の数を、それぞれ v, e, f とし、一つの頂点には n コの面が集まるとする。多面体ができるためには、

[1] 一つの頂点に集まる面の数は 3 以上である。

[2] 凸多面体の一つの頂点に集まる角の大きさの和は、 360° よりも小さい。

次の問いに答えよ。

- (1) n を求めよ。 $n = 3$

- (2) 一般の凸多面体において、 v, e, f の間に成り立つオイラーの公式とはどのようなものか

$$v - e + f = 2$$

- (3) e を f を用いて表せ。 $e = \frac{5f}{2}$

- (4) v を f を用いて表せ。 $v = \frac{5f}{3}$

- (5) (3), (4) で得られた結果を (2) の式に代入し f を求めよ。 $f = 12$

問 6. 次のようにパラメータ形式で表現された 2 次曲線を陰関数形式で表せ。

教科書 p.053 2-3 曲線・曲面 参照

- (1) $x = a \cos \theta + 1, \quad y = b \sin \theta$

$$\frac{x-1}{a} = \cos \theta, \quad \frac{y}{b} = \sin \theta \quad \dots\dots (a)$$

(a) 式を、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 1 = 0$$

に代入すると、

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ を得る。これは、楕円の式である。}$$

$$(2) \quad x = \frac{a}{\cos \theta}, \quad y = b \tan \theta$$

$$\frac{x}{a} = \cos \theta, \quad \frac{y}{b} = \tan \theta \quad \dots\dots (b)$$

ところで、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 1 = 0$$

を $\cos^2 \theta$ で割ると、

$$1 + \tan^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$$

または、

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta - 1 = 0$$

この式に (b) 式を代入すると、 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ を得る。これは、双曲線の式である。

問 7. 極方程式 $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$ を直交座標系に関する方程式で表せ。

与式より $r(1 + \cos \theta) = 1$. $x = r \cos \theta$ だから、 $r + x = 1$. すなわち、 $r = 1 - x$.

この式の両辺を 2 乗して、 $r^2 = x^2 + y^2$ を左辺に代入すると、

$$x^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2, \quad \text{すなわち、} \quad y^2 = -2x + 1 \text{ または、} \quad x = -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \text{ を得る。}$$

問 8. 次の文章を読み、の中に、最も適当な言葉を入れよ。

平面内や空間内の位置を表すために、座標系が用いられる。よく用いられる座標系として a がある。たとえば、平面における a は、原点 O で互いに垂直に交わる 2 つの直線 x 軸と y 軸を用いて定義される。このとき、平面内の点の位置は、 x 軸と y 軸に関する位置を示す数値の組 (x, y) で表される。これに対し、点の位置を原点 O からの距離 r と基準の方向 (x 軸の正の方向) から反時計回りに測った回転角 θ の組 (r, θ) で表す方法が b である。 p.013 1-2 座標系とモデリング
参照

a. (2次元) 直交座標系 b. 極座標系

問 9. 3つの制御点を、 $\vec{P}_0 = (0, 0)$, $\vec{P}_1 = (-1, -1)$, $\vec{P}_2 = (0, -2)$ とする 2 次ベジエ曲線について以下の問に答えよ。

(1) 2点 \vec{P}_0 と \vec{P}_1 を $t : (1-t)$ ($0 \leq t \leq 1$) に内分する点を $\vec{P}_a = (x_a(t), y_a(t))$ とする。 $x_a(t)$, $y_a(t)$ を t の関数として求めよ。

$$\vec{P}_a = (1-t)\vec{P}_0 + t\vec{P}_1 \text{ より、}$$

$$(x_a(t), y_a(t)) = (1-t)(0, 0) + t(-1, -1) = (-t, -t)$$

$$\text{ゆえに、} \quad x_a(t) = -t, \quad y_a(t) = -t$$

(2) 2点 \vec{P}_1 と \vec{P}_2 を $t : (1-t)$ ($0 \leq t \leq 1$) に内分する点を $\vec{P}_b = (x_b(t), y_b(t))$ とする。 $x_b(t)$,

$y_b(t)$ を t の関数として求めよ。

$$\vec{P}_b = (1-t)\vec{P}_1 + t\vec{P}_2 \text{ より、}$$

$$(x_b(t), y_b(t)) = (1-t)(-1, -1) + t(0, -2) = (-1+t, -1-t)$$

$$\text{ゆえに、} x_b(t) = -1+t, \quad y_b(t) = -1-t$$

- (3) 2点 \vec{P}_a と \vec{P}_b を $t : (1-t)$ ($0 \leq t \leq 1$) に内分する点を $\vec{P}_c = (x(t), y(t))$ とする。 $x(t)$, $y(t)$ を t の関数として求めよ。

$$\vec{P}_c = (1-t)\vec{P}_a + t\vec{P}_b \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= (1-t)(-t, -t) + t(-1+t, -1-t) \\ &= (-2t(1-t), -2t) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに、} x(t) = -2t(1-t), \quad y(t) = -2t$$

- (4) 曲線 $\vec{P}_c = (x(t), y(t))$ を陰関数形式、すなわち、 $f(x, y) = 0$ の形式で表せ。

$$t = -\frac{y}{2} \text{ を } x = -2t(1-t) \text{ に代入して、} x = \frac{y(y+2)}{2}, \text{ または、} 2x - y^2 - 2y = 0 \text{ を得る。}$$

問 10. 下図の左はシェルピンスキーのガスケット (gasket - 詰め物) と呼ばれるものである。この図形は、下図右のように、正三角形の真ん中をくり抜く操作を無限回実行した極限として得られる。

- (1) この図形を2倍に拡大すると、それは元の図形の何個分で構成されているか。 **3個**

- (2) この図形のフラクタル次元を求めよ。 $3 = 2^D$ より $D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58496 \dots$

