射影幾何学

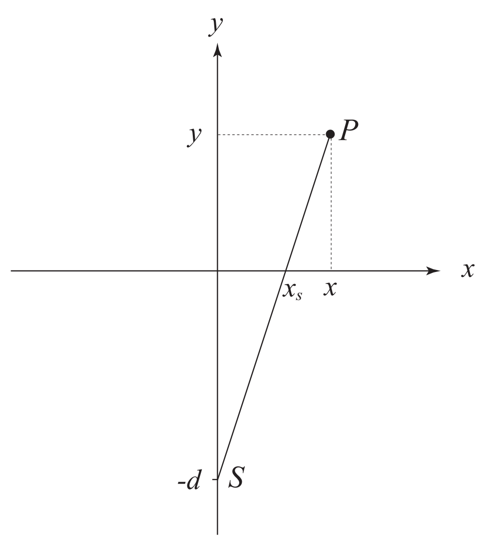
1　同次座標

点 $S(0,\ -d)$ を視点として、点 $P(x,\ y)$ を x 軸上 $(y=0)$ に射影した点を $(x',0)$ とすると、

$$x' = \frac{dx}{d+y}, \quad y_s = 0$$

ここで、同次座標 $(x,\ y,\ 1)$, $(u,\ v,\ w)$ を導入し、$x' = \dfrac{u}{w},\ y' = \dfrac{v}{w}$ と表すことにすると、

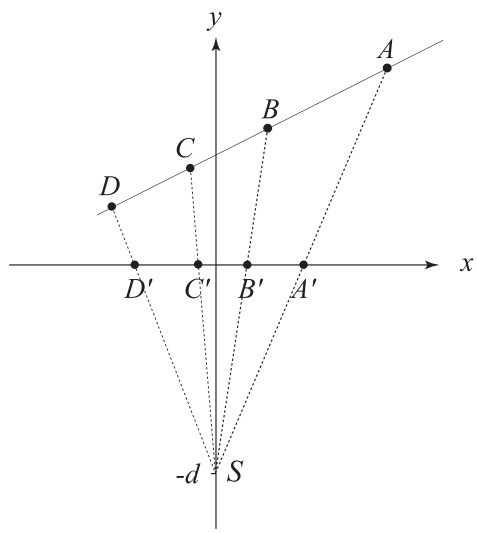
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



2　複比

次に、一直線 $(y=ax+b)$ 上の 4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ の座標を各々$(x_A,\ y_A)$, $(x_B,\ y_B)$, $(x_C,\ y_C)$, $(x_D,\ y_D)$ とし、それらを x 軸に投影した点の x 座標を $x'_A,\ x'_B,\ x'_C,\ x'_D$ すると、

$$x'_A = \frac{dx_A}{d+y_A}, \quad x'_B = \frac{dx_B}{d+y_B}, \quad x'_C = \frac{dx_C}{d+y_C}, \quad x'_D = \frac{dx_D}{d+y_D}$$



ここで、簡単のために一般性を失うこと無く、$x_D < x_C < x_B < x_A$ とすることができる。
ここで、AC 間の距離を求めると、

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 + a^2)(x_A - x_C)^2}$$

同様に、

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{(1 + a^2)(x_B - x_C)^2}\\ \overline{AD} &= \sqrt{(1 + a^2)(x_A - x_D)^2}\\ \overline{BD} &= \sqrt{(1 + a^2)(x_B - x_D)^2}\end{aligned}$$

従って、

$$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right) \Big/ \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\right) = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\right) = \sqrt{\frac{(x_A - x_C)^2}{(x_B - x_C)^2}\frac{(x_B - x_D)^2}{(x_A - x_D)^2}} = \frac{(x_A - x_C)(x_B - x_D)}{(x_B - x_C)(x_A - x_D)}$$

一方、

$$x'_A - x'_C = \frac{dx_A}{d + y_A} - \frac{dx_C}{d + y_C} = \frac{d\left(x_A(d + y_C) - x_C(d + y_A)\right)}{(d + y_A)(d + y_C)} = \frac{d(d + b)(x_A - x_C)}{(d + y_A)(d + y_C)}$$

同様に、

$$\begin{aligned}x'_B - x'_C &= \frac{d(d + b)(x_B - x_C)}{(d + y_B)(d + y_C)}\\ x'_A - x'_D &= \frac{d(d + b)(x_A - x_D)}{(d + y_A)(d + y_D)}\\ x'_B - x'_D &= \frac{d(d + b)(x_B - x_D)}{(d + y_B)(d + y_D)}\end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} = \frac{d + y_B}{d + y_A} \cdot \frac{x_A - x_C}{x_B - x_C}, \quad \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}} = \frac{d + y_B}{d + y_A} \cdot \frac{x_A - x_D}{x_B - x_D}$$

ゆえに、

$$\left(\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}\right) \Big/ \left(\frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}}\right) = \frac{(x_A - x_C)(x_B - x_D)}{(x_B - x_C)(x_A - x_D)}$$

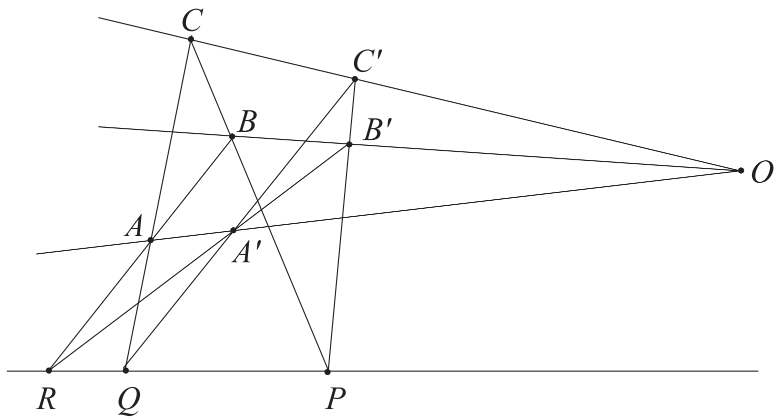
従って、

$$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right) \Big/ \left(\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\right) = \left(\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}\right) \Big/ \left(\frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}}\right)$$

が成り立つ。

3　デザルグの定理 (Desargues' theorem)

2 つの三角形 ABC と $A'B'C'$ の対応する頂点を結ぶ直線が一点 O で交わるとき、対応する辺どうしを延長してできる 3 つの交点は、一直線上にある。



証明 1

最も直感的で簡単な証明は、3 次元のデザルグの定理の証明を行い、それを平面に射影するものである。

3 直線 OA, OB, OC が同一平面内に無い場合を考えよう。三角形 ABC を含む平面と三角形 $A'B'C'$ を含む平面の交線を ℓ とする。2 つの直線 BC と $B'C'$ は同一平面上にあり、しかも直線 BC は三角形 ABC を含む平面にあり、直線 $B'C'$ は $A'B'C'$ を含む平面内にあるので、2 直線の交点 P は直線 ℓ 上にある。同様に、点 Q と R も直線 ℓ 上にあることが分る。3 次元のデザルグの図形を平面に射影することにより、2 次元のデザルグの定理を得る。

証明 2

ここでは、代数的な方法で証明しよう。

2 点 $A(x_A,\ y_A)$, $B(x_B,\ y_B)$ を通る直線の方程式は、

$$L_{AB}(x, y) = (x_A - x_B)y - (y_A - y_B)x - x_A y_B + x_B y_A = 0$$

と書ける。実際、

$$L_{AB}(x_A,\ y_A) = L_{AB}(x_B,\ y_B) = 0$$

は容易に確かめられる。

また、関数 $L_{AB}(x,\ y)$ は、次の性質を持つ。点 $C(x_C,\ y_C)$ をこの関数に代入した値 $L_{AB}(x_C,\ y_C)$ を簡単のために、$L_{AB}(C)$ と書くことにしよう。すると、

$$\begin{aligned} L_{AB}(C) &= (x_A - x_B)y_C - (y_A - y_B)x_C - x_A y_B + x_B y_A \\ &= -x_A y_B + x_B y_A - x_B y_C + x_C y_B - x_C y_A + x_A y_C \\ &= L_{BC}(A) = L_{CA}(B) \\ &= -L_{CB}(A) = -L_{BA}(C) = -L_{AC}(B) \end{aligned}$$

2点 $C,\ A$ を通る直線の方程式は、$L_{CA}(x,\ y) = 0$ である。点 A を通る直線の方程式は、$L_{AB}(x,\ y)$ と $L_{CA}(x,\ y)$ の一次結合で表される。

$$L_A(x,\ y) = \alpha L_{AB}(x,\ y) - \beta L_{CA}(x,\ y) = 0$$

このことは、$L_A(x,\ y)$ は $x,\ y$ の一次式で、$L_A(x_A,\ y_A) = 0$ から容易に理解できる。この直線が O を通過するためには、

$$L_A(x_O,\ y_O) = \alpha L_{AB}(x_O,\ y_O) - \beta L_{CA}(x_O,\ y_O) = 0$$

である。したがって、k を定数として、

$$\begin{aligned} \alpha &= L_{CA}(x_O,\ y_O)/k \equiv L_{CA}(O)/k \\ \beta &= L_{AB}(x_O,\ y_O)/k \equiv L_{AB}(O)/k \end{aligned}$$

ゆえに、直線 AO の方程式は、

$$kL_{AO}(x,\ y) = L_{CA}(O)L_{AB}(x,\ y) - L_{AB}(O)L_{CA}(x,\ y) = 0$$

と表される。ここで、(x, y) の値として、点 C の座標を代入すると、

$$kL_{AO}(C) = L_{CA}(O)L_{AB}(C) = L_{AO}(C)L_{AB}(C)$$

より、$k = L_{AB}(C)$ と求まる。求める直線の方程式は、

$$L_{AB}(C)L_{AO}(x,\ y) = L_{CA}(O)L_{AB}(x,\ y) - L_{AB}(O)L_{CA}(x,\ y) = 0 \tag{1}$$

である。

同様にして、直線 $BO,\ CO$ の方程式を求めると、

$$L_{BC}(A)L_{BO}(x,\ y) = L_{AB}(O)L_{BC}(x,\ y) - L_{BC}(O)L_{AB}(x,\ y) = 0 \tag{2}$$

$$L_{CA}(B)L_{CO}(x,\ y) = L_{BC}(O)L_{CA}(x,\ y) - L_{CA}(O)L_{BC}(x,\ y) = 0 \tag{3}$$

三角形 $A'B'C'$ についても同様の計算をおこなうと、

$$L_{A'B'}(C')L_{A'O}(x,\ y) = L_{C'A'}(O)L_{A'B'}(x,\ y) - L_{A'B'}(O)L_{C'A'}(x,\ y) = 0 \tag{4}$$

$$L_{B'C'}(A')L_{B'O}(x,\ y) = L_{A'B'}(O)L_{B'C'}(x,\ y) - L_{B'C'}(O)L_{A'B'}(x,\ y) = 0 \tag{5}$$

$$L_{C'A'}(B')L_{C'O}(x,\ y) = L_{B'C'}(O)L_{C'A'}(x,\ y) - L_{C'A'}(O)L_{B'C'}(x,\ y) = 0 \tag{6}$$

ここで、(1) 式に $L_{BC}(O)$ を掛け、(2) 式に $L_{CA}(O)$ を掛け、(3) 式に $L_{AB}(O)$ を掛けて、

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{AB}(x,\ y) &= L_{BC}(O)L_{CA}(O)L_{AB}(x,\ y)\\ \tilde{L}_{CA}(x,\ y) &= L_{AB}(O)L_{BC}(O)L_{CA}(x,\ y)\\ \tilde{L}_{BC}(x,\ y) &= L_{CA}(O)L_{AB}(O)L_{BC}(x,\ y)\end{aligned}$$

と置くと、(1), (2), (3) 式は、各々、

$$\tilde{L}_{AB}(x,\ y)-\tilde{L}_{CA}(x,\ y) = 0 \tag{7}$$
$$\tilde{L}_{BC}(x,\ y)-\tilde{L}_{AB}(x,\ y) = 0 \tag{8}$$
$$\tilde{L}_{CA}(x,\ y)-\tilde{L}_{BC}(x,\ y) = 0 \tag{9}$$

となる。

同様に、

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y) &= L_{B'C'}(O)L_{C'A'}(O)L_{A'B'}(x,\ y)\\ \tilde{L}_{C'A'}(x,\ y) &= L_{A'B'}(O)L_{B'C'}(O)L_{C'A'}(x,\ y)\\ \tilde{L}_{B'C'}(x,\ y) &= L_{C'A'}(O)L_{A'B'}(O)L_{B'C'}(x,\ y)\end{aligned}$$

と置くと、(4), (5), (6) 式は、各々、

$$\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y)-\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y) = 0 \tag{10}$$
$$\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y)-\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y) = 0 \tag{11}$$
$$\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y)-\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y) = 0 \tag{12}$$

となる。

ところが、$L_{AO}(x,\ y)$ と $L_{A'O}(x,\ y)$ は同じ直線を表すので、両者は定数倍の違いを除いて一致する。$L_{BO}(x,\ y)$ と $L_{B'O}(x,\ y)$, $L_{CO}(x,\ y)$ と $L_{C'O}(x,\ y)$ に関しても同様である。そこで、適当な定数 κ_1, κ_2, κ_3 を用いて、

$$\tilde{L}_{AB}(x,\ y)-\tilde{L}_{CA}(x,\ y) = \kappa_1\left(\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y)-\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y)\right) \tag{13}$$
$$\tilde{L}_{BC}(x,\ y)-\tilde{L}_{AB}(x,\ y) = \kappa_2\left(\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y)-\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y)\right) \tag{14}$$
$$\tilde{L}_{CA}(x,\ y)-\tilde{L}_{BC}(x,\ y) = \kappa_3\left(\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y)-\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y)\right) \tag{15}$$

と表すことができる。(13), (14), (15) を加えると、左辺は 0 となるので、

$$(\kappa_1-\kappa_2)\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y)+(\kappa_2-\kappa_3)\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y)+(\kappa_3-\kappa_1)\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y)=0 \tag{16}$$

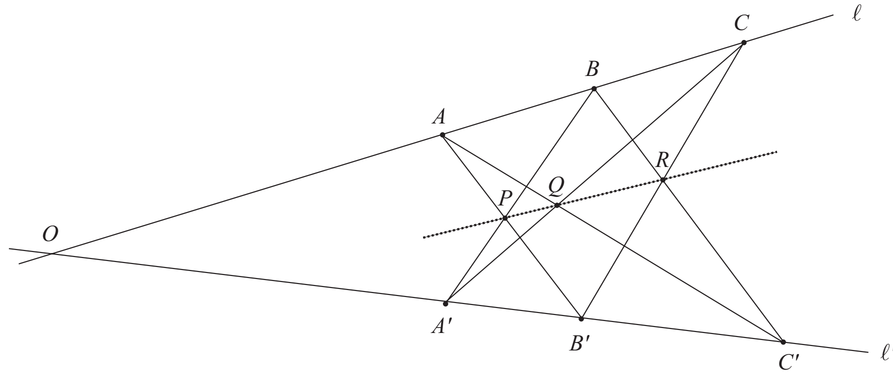
は、恒等的に成り立たなければならない。したがって、$\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3\equiv\kappa$ となり、

$$\tilde{L}_{AB}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y)=\tilde{L}_{BC}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y)=\tilde{L}_{CA}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y) \tag{17}$$

が成り立つ。ところで、$\tilde{L}_{AB}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y)=0$ は、2 直線 AB と $A'B'$ の交点 R を通る直線を表す。同様に、$\tilde{L}_{BC}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y)=0$ は、2 直線 BC と $B'C'$ の交点 Q を通る直線を、$\tilde{L}_{CA}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y)=0$ は、2 直線 CA と $C'A'$ の交点 Q を通る直線を表す。(17) 式は、もし、$\tilde{L}_{AB}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{A'B'}(x,\ y)=0$ が成り立てば、$\tilde{L}_{BC}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{B'C'}(x,\ y)=0$ も $\tilde{L}_{CA}(x,\ y)-\kappa\tilde{L}_{C'A'}(x,\ y)=0$ 同時に成り立つことを示している。すなわち、3 点 P, R, Q は同一直線上にある。

4　パップスの定理 (Pappus' theorem)

直線 ℓ 上に点 A, B, C が、直線 ℓ' 上に点 A', B', C' がある。直線 AB' と $A'B$ の交点を P, 直線 AC' と $A'C$ の交点を R, 直線 BC' と $B'C$ の交点を R とすると、3 点は同一直線上にある。



証明

点 A を通る直線 $L_A(x,y)$ の方程式は、

$$L_A(x,y) = \alpha L_{AB'}(x,y) - \beta L_{AC'}(x,y)$$

と書ける。この直線が点 A' を通るように係数 α, β を定めると、k を定数として、

$$kL_{AA'}(x,y) = L_{AC'}(A')L_{AB'}(x,y) - L_{AB'}(A')L_{AC'}(x,y) = 0$$

と書ける。ここで、$L_{AC'}(A') = -L_{AA'}(C')$, $L_{AB'}(A') = -L_{AA'}(B')$ であることに注意して、$(x,\ y)$ に点 C' の座標を代入すると、$k = L_{AC'}(B')$ と求まるので、

$$L_{AC'}(B')L_{AA'}(x,y) = -L_{AA'}(C')L_{AB'}(x,y) + L_{AA'}(B')L_{AC'}(x,y) = 0 \tag{18}$$

同様にして、直線 BB' の方程式を求めると、

$$L_{BC'}(A')L_{BB'}(x,y) = -L_{BB'}(C')L_{BA'}(x,y) + L_{BB'}(A')L_{BC'}(x,y) = 0 \tag{19}$$

となる。

一方、点 A' を通る直線の $L'_{A'}(x,y)$ の方程式は、

$$L'_{A'}(x,y) = \alpha' L_{BA'}(x,y) - \beta' L_{CA'}(x,y)$$

と書ける。この直線が点 A を通るように係数 α', β' を定めると、

$$L_{CA'}(B)L_{AA'}(x,y) = -L_{AA'}(C)L_{BA'}(x,y) + L_{AA'}(B)L_{CA'}(x,y) = 0 \tag{20}$$

同様に、点 B' を基準にして直線 BB' の方程式を求めると、

$$L_{CB'}(A)L_{BB'}(x,y) = -L_{BB'}(C)L_{AB'}(x,y) + L_{BB'}(A)L_{CB'}(x,y) = 0 \tag{21}$$

(18) 式に $L_{CA'}(B)$ を掛けたものと、(20) 式に $L_{AC'}(B')$ を掛けたものは等しいので、

$$\begin{aligned} &L_{CA'}(B)\left[-L_{AA'}(C')L_{AB'}(x,y) + L_{AA'}(B')L_{AC'}(x,y)\right] \\ &= L_{AC'}(B')\left[-L_{AA'}(C)L_{BA'}(x,y) + L_{AA'}(B)L_{CA'}(x,y)\right] \end{aligned}$$

が成り立つ。これを書き直して、

$$\begin{aligned}&L_{CA'}(B)L_{AA'}(C')L_{AB'}(x,y)-L_{AC'}(B')L_{AA'}(C)L_{BA'}(x,y)\\&=L_{CA'}(B)L_{AA'}(B')L_{AC'}(x,y)-L_{AC'}(B')L_{AA'}(B)L_{CA'}(x,y)\end{aligned}\tag{22}$$

を得る。(22) 式を 0 とおくと、これは、直線 AB' と BA' の交点 P と直線 AC' と CA' の交点 Q を結ぶ直線の方程式を表す。

(19) 式と (21) 式からは、恒等式

$$\begin{aligned}&L_{CB'}(A)\left[-L_{BB'}(C')L_{BA'}(x,y)+L_{BB'}(A')L_{BC'}(x,y)\right]\\&=L_{BC'}(A')\left[-L_{BB'}(C)L_{AB'}(x,y)+L_{BB'}(A)L_{CB'}(x,y)\right]\end{aligned}$$

が得られる。これを書き直して、

$$\begin{aligned}&L_{BC'}(A')L_{BB'}(C)L_{AB'}(x,y)-L_{CB'}(A)L_{BB'}(C')L_{BA'}(x,y)\\&=L_{BC'}(A')L_{BB'}(A)L_{CB'}(x,y)-L_{CB'}(A)L_{BB'}(A')L_{BC'}(x,y)\end{aligned}\tag{23}$$

とする。(23) 式を 0 とおくと、これは、直線 AB' と BA' の交点 P と直線 CB' と BC' の交点 R を結ぶ直線の方程式を表す。

3 点 P, Q, R が一直線上にあることを示すためには、(22) 式の左辺と (23) 式の左辺が定数を除いて一致することを示せば良い。すなわち、

$$\frac{L_{CA'}(B)L_{AA'}(C')}{L_{AC'}(B')L_{AA'}(C)}=\frac{L_{BC'}(A')L_{BB'}(C)}{L_{CB'}(A)L_{BB'}(C')}\tag{24}$$

を示せば良い。

直線 ℓ と ℓ' の交点を O とする。直線 OC の方程式は、

$$L_{CB'}(O)L_{CA'}(x,y)-L_{CA'}(O)L_{CB'}(x,y)=0$$

と書ける。点 A と B は、この直線上にあるから、

$$L_{CB'}(O)L_{CA'}(A)=L_{CA'}(O)L_{CB'}(A),\quad L_{CB'}(O)L_{CA'}(B)=L_{CA'}(O)L_{CB'}(B)$$

が成り立つ。ゆえに、

$$\frac{L_{CA'}(B)}{L_{CA'}(A)}=\frac{L_{CB'}(B)}{L_{CB'}(A)}$$

が成り立つ。ところで、$L_{CA'}(A)=-L_{AA'}(C)$, $L_{CB'}(B)=-L_{BB'}(C)$ だから、

$$\frac{L_{CA'}(B)}{L_{AA'}(C)}=\frac{L_{BB'}(C)}{L_{CB'}(A)}\tag{25}$$

が成り立つ。

直線直線 OC' の方程式は、

$$L_{BC'}(O)L_{AC'}(x,y)-L_{AC'}(O)L_{BC'}(x,y)=0$$

と書ける。点 A' と B' は、この直線上にあるから

$$L_{BC'}(O)L_{AC'}(A')=L_{AC'}(O)L_{BC'}(A'),\quad L_{BC'}(O)L_{AC'}(B')=L_{AC'}(O)L_{BC'}(B')$$

が成り立つ。ゆえに、

$$\frac{L_{AC'}(A')}{L_{AC'}(B')} = \frac{L_{BC'}(A')}{L_{BC'}(B')}$$

が成り立つ。ところで、$L_{AC'}(A') = -L_{AA'}(C'),\ L_{BC'}(B') = -L_{BB'}(C')$ だから、

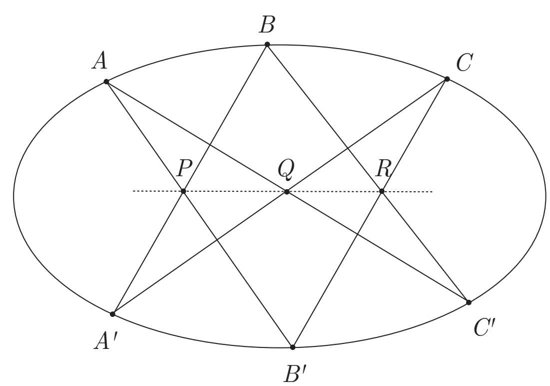
$$\frac{L_{AA'}(C')}{L_{AC'}(B')} = \frac{L_{BC'}(A')}{L_{BB'}(C')} \tag{26}$$

が成り立つ。

等式 (25) と (26) より、式 (24) が成り立つことが分る。ゆえに、3 点 $P,\ Q,\ R$ は一直線上にある。

5 パスカルの定理 (Pascal's theorem)

円錐曲線に内接する六角形の 3 組の交点は共線である (同一直線上にある)。すなわち、下図のように、六角形の頂点を、図のように、$A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C'$ とおき、直線 AB' と $A'B$ の交点を P, 直線 AC' と $A'C$ の交点を R, 直線 BC' と $B'C$ の交点を R とすると、3 点は同一直線上にある。



証明

この定理は、パップスの定理における直線 $\ell,\ \ell'$ を円錐曲線に一般化したものである。したがって、パスカルの定理の証明においても、パップスの定理で (22) 式、(23) 式を導いた過程までは同じである。

一般に 2 次曲線は、$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ と 6 つのパラメータを使って書かれるが、全体にかかる定数は任意だから、例えば、a は常に $a = 1$ に選ぶことができる。したがって、2 次曲線は、残りの 5 つのパラメータによって 1 つに決まる。今、4 つの点 $A,\ B,\ A',\ B'$ を通る円錐曲線を、

$$L_{A'B}(x,\ y)L_{B'A}(x,\ y) - kL_{AA'}(x,\ y)L_{BB'}(x,\ y) = 0 \tag{27}$$

と書こう。ここで、定数 k は、点 C を通るように定める。すなわち、

$$L_{A'B}(C)L_{B'A}(C) - kL_{AA'}(C)L_{BB'}(C) = 0 \tag{28}$$

を満たすように決める。これで円錐曲線は完全に決まるので、同じ円錐曲線上の別の点 C' についても、同じ k を用いた式、

$$L_{A'B}(C')L_{B'A}(C') - kL_{AA'}(C')L_{BB'}(C') = 0 \tag{29}$$

が成り立つ。(28), (29) 式を k について解いて等しいとおくと、

$$\frac{L_{A'B}(C)L_{B'A}(C)}{L_{AA'}(C)L_{BB'}(C)} = \frac{L_{A'B}(C')L_{B'A}(C')}{L_{AA'}(C')L_{BB'}(C')} \tag{30}$$

を得る。ここで、$L_{A'B}(C) = L_{CA'}(B)$, $L_{B'A}(C) = L_{CB'}(A)$, $L_{A'B}(C') = L_{BC'}(A')$, $L_{B'A}(C') = L_{AC'}(B')$ をもちいて、(30) 式を書きなおすと、

$$\frac{L_{CA'}(B)L_{CB'}(A)}{L_{AA'}(C)L_{BB'}(C)} = \frac{L_{BC'}(A')L_{AC'}(B')}{L_{AA'}(C')L_{BB'}(C')}$$

となる。更に、右辺と左辺の一部の移項を行うと、

$$\frac{L_{CA'}(B)L_{AA'}(C')}{L_{AC'}(B')L_{AA'}(C)} = \frac{L_{BC'}(A')L_{BB'}(C)}{L_{CB'}(A)L_{BB'}(C')}$$

が得られる。これは (24) 式に他ならない。ゆえに、3 点 P, Q, R は一直線上にある。