練習問題 E1

学籍番号　　　　　　名前

問題. 各面が正三角形である正多面体の頂点、稜線、面の数を、それぞれ v, e, f とし、一つの頂点には n コの面が集まるとする。多面体ができるためには、

[1] 1 つの頂点に集まる面の数は 3 以上である。

[2] 凸多面体の 1 つの頂点に集まる角の大きさの和は、360 °よりも小さい。

次の問に答えよ。

(1) [1] と [2] から n の下限と上限を求めよ。
$3 \leqq n \leqq 5$

(2) v, e, f の間には、どのような関係が成り立つか。
$v - e + f = 2$

(3) e を f を用いて表せ。
$e = \dfrac{3f}{2}$

(4) v を f と n を用いて表せ。
$v = \dfrac{3f}{n}$
【注】$e = \dfrac{nv}{2}$ も成り立つので、これをオイラーの公式に代入すると、
別解 $v = \dfrac{2(f-2)}{n-2}$ を得る。

(5) (2), (3) で得られた結果を (1) の式に代入し、f を n で表せ。
$\dfrac{3f}{n} - \dfrac{3f}{2} + f = 2$ より、$f = \dfrac{4n}{6-n}$

(6) 各面が正三角形である正多面体にはどのようなものがあるか。名前を挙げよ。
(1) より、$3 \leq n \leq 5$ である。また、(5) 式より、
$n = 3$ のとき　$f = 4$、$n = 4$ のとき　$f = 8$、$n = 5$ のとき　$f = 20$。
ゆえに、正 4 面体、正 8 面体、正 20 面体の 3 種類である。