B スプライン曲線

緑川 章一

B スプライン曲線 (B-spline curve) は、制御点 $\{\mathbf{P}_i\}$ とノットと呼ばれるパラメータ $t(\{t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots\})$ によって定義される曲線である。B-spline の B は、basis の頭文字なので、正確に言うと basis spline となる。ノット列を等間隔にとったものを一様 B スプライン曲線と呼ぶ。B スプライン曲線は、局所的に定義されていて、制御点が及ぼす影響の範囲は局所的に限定されている。B スプライン曲線の最小単位をセグメントと呼ぶ。1 セグメントからなる n 次の B スプライン曲線は、$\{\mathbf{P}_0,\ \mathbf{P}_1,\ \cdots,\ \mathbf{P}_n\}$ の $n+1$ 個の制御点により構成されている。L 個のセグメントからなる n 次の B スプライン関数は、

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n+L-1} \mathbf{P}_i N_i^n(t) \tag{1}$$

パラメータ t の動く範囲は t_n から t_{n+L} である。ここで、$N_i^n(t)$ は、n 次の B スプライン基底関数で、次の漸化式により定義される t の n 次関数である。

$$N_i^n(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+n} - t_i} N_i^{n-i}(t) + \frac{t_{i+n+1} - t}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \tag{2}$$

ここで、

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i,\ t_{i+1})\ \text{のとき} \\ 0 & t \notin [t_i,\ t_{i+1})\ \text{のとき} \end{cases} \tag{3}$$

一様 B スプライン曲線の場合には、$t_i + t_j = t_{i+j}$ が成り立つので、

$$N_i^n(t) = N_0^n(t - t_i + t_0)$$

が成り立つ。

1　0 次 B スプライン曲線の構成

B スプライン基底関数の定義式 (2)、(3) の意味について考える。簡単のために、ノット列を $t_i = i$ となるように、すなわち、
$\{t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ \cdots\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$ と選ぶことにする。

0 次の基底関数 $N_i^0(t)$ は、は、$[i,\ i+1)$ で 1、それ以外では、0 となる関数である (図 1 参照)。

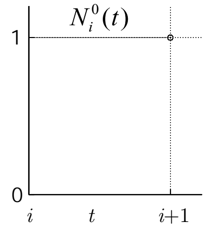

図 1: $N_i^0(t)$

具体的な例として、$N_0^0(t)$ と $N_1^0(t)$ を図 2 に表示する。従って、0 次の B スプ

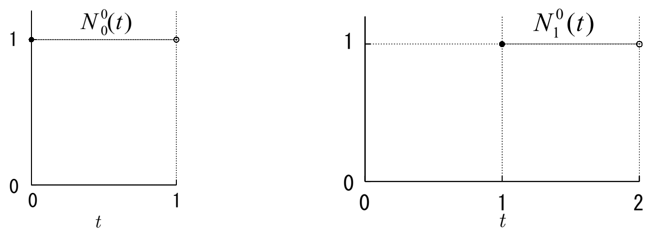

図 2: $N_0^0(t)$ と $N_1^0(t)$

ライン曲線は、離散的な制御点の集まりである。これは、普通の意味の曲線ではない。

2　1 次 B スプライン曲線の構成

次に、$N_0^1(t)$ の構成法を示す。先ず、$N_0^0(t)$ に t を掛けて、左半分を作る (図 3 参照)。今回は、t $(0 \leqq t < 1)$ そのものである。

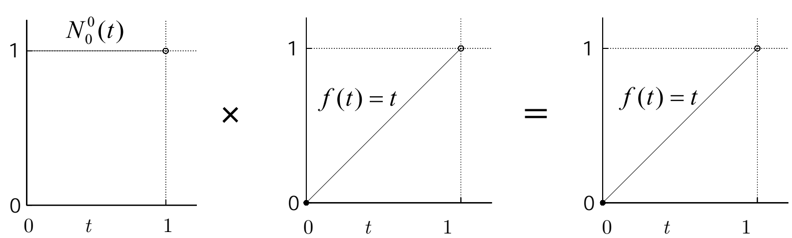

図 3: N_0^1 の左半分の構成法

右半分を作るには、$N_1^0(t)$ に $(2-t)$ を掛けてやれば良い。このようにして作られた関数もまた、$2-t$ $(1 \leqq t < 2)$ そのものである。

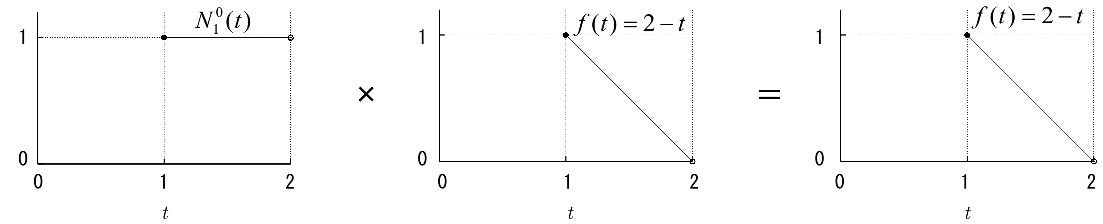

図 4: N_0^1 の右半分の構成法

以上のようにして作られた2つの関数を合成することにより、$N_0^1(t)$ は完成する。

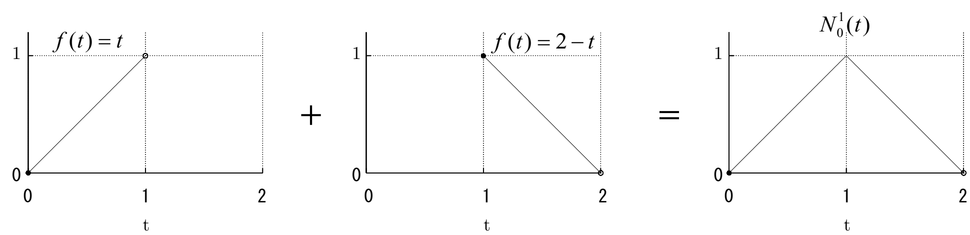

図 5: N_0^1 の合成

$$N_0^1(t) = \begin{cases} t & t \in [0,\ 1) \text{ のとき} \\ 2-t & t \in [1,\ 2) \text{ のとき} \\ 0 & t \notin [0,\ 2) \text{ のとき} \end{cases} \tag{4}$$

他の基底関数 $N_i^0(t)$ は、$N_0^0(t)$ を t 軸の正の方向に i だけ平行移動してやれば良い。すなわち、

$$N_i^0(t) = N_0^0(t-i)$$

1 次の B スプライン関数は、各制御点を順に直線で結んだものである。

3　2次Bスプライン曲線の構成

2 次の基底関数 $N_0^2(t)$ は、$N_0^0(t)$ と $N_1^0(t)$ から構成される。左半分は、$N_0^1(t)$ に $t/2$ を掛けて得られる (図6を参照)。

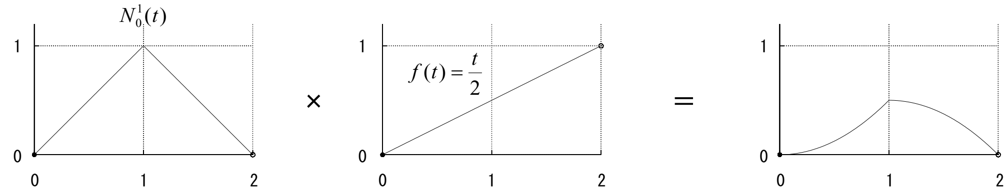

図 6: $N_0^2(t)$ の左半分

右半分は、$N_1^1(t)$ と $(3-t)/2$ を掛けて得られる。

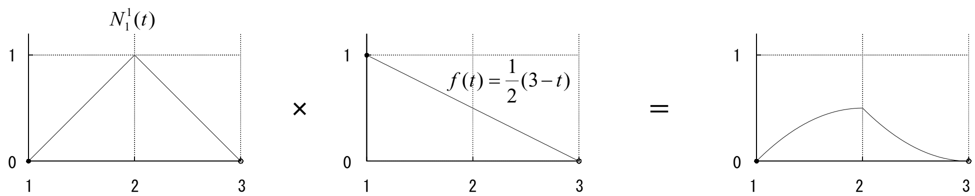

図 7: $N_0^2(t)$ の左半分

最後に、上で構成した右半分と左半分を合成する。ここで注意すべきは、真中の部分 $(1 < t < 2)$ を重ねて 2 つの関数を貼り合わせなければならないことである。

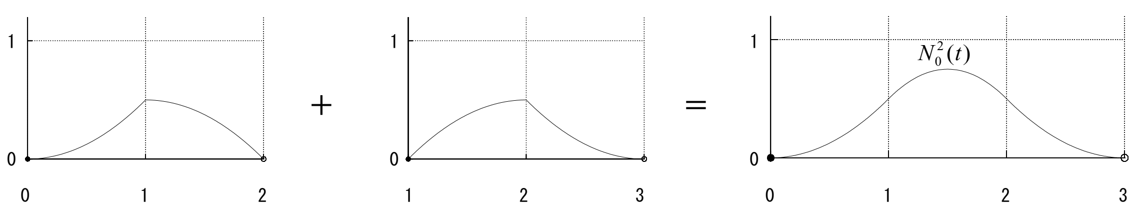

図 8: $N_0^2(t)$ の合成

$$
N_0^2(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 & t \in [0,\ 1) \text{ のとき} \\ -t^2 + 3t - \dfrac{3}{2} & t \in [1,\ 2) \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{2}(t-3)^2 & t \in [2,\ 3) \text{ のとき} \\ 0 & t \notin [0,\ 3) \text{ のとき} \end{cases} \tag{5}
$$

他の 2 次基底関数 $N_i^2(t)$ は、$N_0^2(t)$ を t 軸の正の方向に i だけ平行移動することによって得られる。

$$
N_i^2(t) = N_0^2(t-i)
$$

4　3次Bスプライン曲線の構成

　更に高次の基底関数も上の構成法を繰り返すことによって作られる。よく使われる3次の基底関数 $N_0^3(t)$ をつくるには、まず、$N_0^2(t)$ に $3/t$ を掛けて、左半分を構成する (図9を参照)。

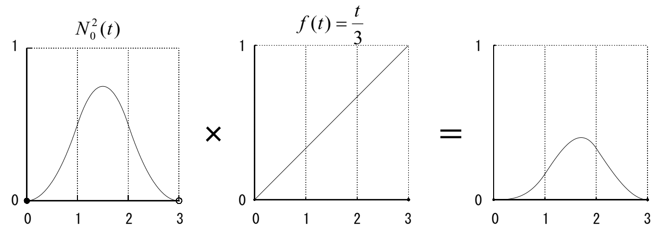

図 9: $N_0^3(t)$ の左半分

右半分は、$N_1^2(t)$ に $(4-t)/3$ を掛けてつくる。

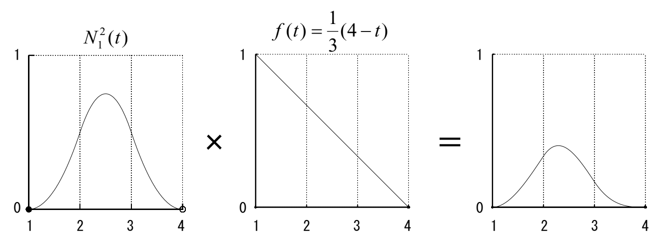

図 10: $N_0^3(t)$ の右半分

最後に、左半分と右半分を、真中の $1 < t < 3$ の部分を重ねて貼り合わせる。

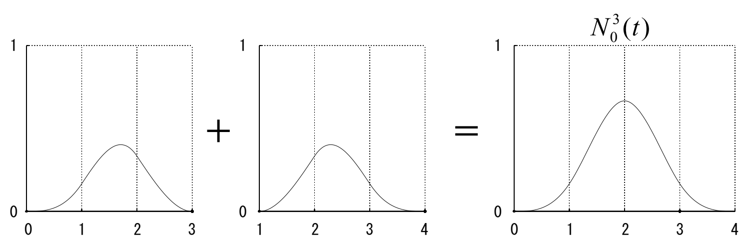

図 11: $N_0^3(t)$ の完成

$$N_0^3(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}t^3 & t \in [0,\ 1) \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{6}\left(-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4\right) & t \in [1,\ 2) \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{6}\left(3t^3 - 24t^2 + 60t - 44\right) & t \in [2,\ 3) \text{ のとき} \\ -\dfrac{1}{6}(t-4)^3 & t \in [3,\ 4) \text{ のとき} \\ 0 & t \notin [0,\ 4) \text{ のとき} \end{cases} \tag{6}$$