

不定積分  $\int \frac{1}{x^3+1} dx$  の計算

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1} dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-4}{x^2-x+1} dx\end{aligned}\tag{1}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \ln(x^2-x+1) - 3 \int \frac{1}{x^2-x+1} dx\end{aligned}\tag{2}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{1}{\left(x - e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{3}} \int \left( \frac{1}{x - e^{-\frac{\pi}{3}i}} - \frac{1}{x - e^{\frac{\pi}{3}i}} \right) dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{3}} \ln \left( \frac{x - e^{-\frac{\pi}{3}i}}{x - e^{\frac{\pi}{3}i}} \right)\end{aligned}\tag{3}$$

ここで、

$$\begin{aligned}x - e^{-\frac{\pi}{3}i} &= \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= i\sqrt{x^2-x+1} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2-x+1}} - i \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \right\} \\ &= i\sqrt{x^2-x+1} \{\cos\varphi - i\sin\varphi\} \\ &= i\sqrt{x^2-x+1} e^{-i\varphi}\end{aligned}$$

とおくと、

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2-x+1}}, \quad \sin\varphi = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

すなわち、

$$\tan\varphi = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}, \quad \text{または、} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\tag{4}$$

また、

$$x - e^{\frac{\pi}{3}i} = -i\sqrt{x^2-x+1} e^{i\varphi}$$

となるので、

$$\ln\left(\frac{x - e^{-\frac{\pi}{3}i}}{x - e^{\frac{\pi}{3}i}}\right) = \ln(-e^{-2i\varphi}) = \ln e^{-2i\varphi+\pi i} = -2i\varphi + \pi i\tag{5}$$

を得る。

(1) ~ (5) 式より、結局、

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

を得る。