不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ の計算

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x-i)(x+i)}\,dx \\
&= \frac{1}{2i}\int \left\{ \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right\} dx \\
&= \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
x-i &= -i\sqrt{x^2+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + i\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= -i\sqrt{x^2+1}\; e^{i\varphi}
\end{aligned}
$$

とおくと、

$$
\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
$$

すなわち、

$$
\tan\varphi = x, \quad \text{または、} \quad \varphi = \arctan(x)
$$

また、

$$
x+i = i\sqrt{x^2+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - i\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = i\sqrt{x^2+1}\; e^{-i\varphi}
$$

なので、

$$
\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right) = \ln\left(-e^{2i\varphi}\right) = \ln e^{2i\varphi+\pi i} = 2i\varphi + \pi i
$$

となるので、結局、

$$
\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C
$$

を得る。