教員採用試験　数学科問題

平成 31 年 1 月 16 日

1　2016 年度　中高共通

[1] 次の（１）～（15）の問いに答えなさい。ただし、答えのみ記入しなさい。

(1) $9 \div 6 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$ を計算しなさい。

$$9 \times \frac{1}{6} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{4}$$

(2) $x^2y - 2x^2 - y + 2$ を因数分解しなさい。

$$\begin{aligned}
&x^2(y-2) - (y-2) \\
&= (x^2-1)(y-2) \\
&= (x-1)(x+1)(y-2)
\end{aligned}$$

(3) 不等式 $\frac{1}{x+2} \leqq 3$ を解きなさい。

$x \geqq 2$ のとき, $1 \leqq 3x - 6$ より, $x \geqq \frac{7}{3}$　したがって,

$$x \geqq \frac{7}{3} \cdots (1)$$

$x < 2$ のとき, $1 \geqq 3x - 6$ より, $x \leqq \frac{7}{3}$　したがって,

$$x < 2 \cdots (2)$$

(1) または (2) より, $x < 2$,　$x \geqq \frac{7}{3}$

(4)　$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき, $x^3 + x^2 - x - 2$ を求めなさい。

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ より,

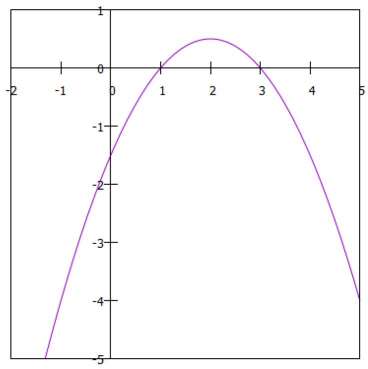
$2x - 1 = \sqrt{5}$なので, 両辺を 2 乗して,

$4x^2 + 4x + 1 = 5,$　つまり,

$x^2 + x - 1 = 0$

よって $x^3 + x^2 - x - 2 = x(x^2 + x - 1) - 2 = -2$

(5) 次の図は 2 次関数のグラフを表しています。この 2 次関数を求めなさい。



x の軸が$\dfrac{-1+5}{2} = 2$ より, $y = a(x-2)^2 + q \cdots (1)$

点 $(-1, -4), (3, 0)$ をそれぞれ代入して,

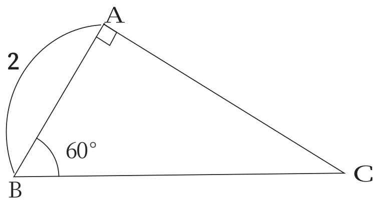
$-4 = 9a + q \cdots (2)$

$0 = a + q \cdots (3)$

(2) と (3) より, $a = -\dfrac{1}{2}$,　$b = \dfrac{1}{2}$　これを (1) に代入して,

$y = -\dfrac{1}{2}(x-2)^2 + \dfrac{1}{2}$

(6) $\triangle ABC$において, $AC=1, BC=6, \angle ABC=30^\circ$ のとき, $\angle BAC$の大きさを求めなさい。



正弦定理より,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin \angle BAC}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、$\angle BAC = 60^\circ$、120°

(7) 1 桁の正の整数全体の集合を全体集合 U とし,U の部分集合 A,B を
$A=\{n|n$ の奇数$\}, B=\{2,3,5,7\}$ とするとき, 集合 $\bar{A}\cup\bar{B}$ を求めなさい。

$\bar{A}=\{2,4,6,8\}, \bar{B}=\{1,4,6,8,9\}$ であるから,

$\bar{A}\cup\bar{B}=\{1,2,4,6,8,9\}$

(8) 等式 $(1-i)x+(3+2i)y=2+3i$ を満たす, 実数 x, y の値を求めなさい。

実部と虚部の比較をすると,

$x+3y=2\cdots(1)$

$-x+2y=3\cdots(2)$

(1), (2) より、 x＝－ 1 、 y＝1

(9) 10 人の生徒を 3 人、3 人、2 人、2 人の 4 組に分ける方法は何通りあるか求めなさい。

$$\frac{{}_{10}C_3 \times {}_7C_3}{2!} \times \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_2}{2!} = 6300$$

(10) 3 次方程式 $2x^3+6x^2+3x-2=0$ を解きなさい。

因数定理より,

$$(x+2)(2x^2+2x-1)=0$$

よって、$x=-2, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

(11) 方程式 $4^x-2^{x+1}-3=0$ を解きなさい。

$$2^{2x}+2\cdot 2^x-3=0$$
$$=(2^x-3)(2^x+1)=0$$

$2^x>0$ より、$2^x=3$

よって、$x=log_2 3$

(12) 円 $x^2+y^2=36$ が直線 $y=2x+10$ から切り取る線分の長さを求めなさい。

円の中心（０，０）

$2x-y+10=0$

$$\frac{|2\times 0-1\times 0+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$$

円の半径が 6 なので、三平方の定理より、

$6^2=(2\sqrt{5})^2+x^2$

$x=4$

よって、求める長さは $2x=8$

(13) 定積分 $\int_{-2}^{2}(x^3-3x^2+3x-1)dx$ の値を求めなさい。

$$\left[\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{3x^2}{2}-x\right]_{-2}^{2}$$

$$=4-8+6-2-(4+8+6+2)$$

$$=-20$$

(14) $\angle BAC=90^\circ$、$\angle ABC=60^\circ$、$AB=2$ の直角三角形 ABC において、
内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を求めなさい。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$=-|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cdot\cos 60^\circ$$

$$=-2\cdot\ 4\ \cdot\frac{1}{2}$$

$$=-4$$

(15) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$ の極限を求めなさい。

$$\frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x}$$
$$=\frac{(x^2-x-x^2)}{\sqrt{x^2-x}+x}$$
$$=\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$$
$$=\frac{-1}{2}$$

[2] 次の (1)〜(3) の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$ の増減を調べ、極値を求めなさい。またそのグラフをかきなさい。

$$y = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$$
$$y' = 9x^2 - 12x + 3$$
$$y' = 3(3x^2 - 4x + 1)$$
$$y' = 3(3x - 1)(x - 1)$$
$$x = \frac{1}{3}, 1$$

(2) 関数 $f(\theta) = 3\cos 3\theta - 12\cos 2\theta + 21\cos\theta - 8$ において、$t = \cos\theta$ とするとき、$f(\theta)$ を t を用いて表しなさい。

オイラーの公式より、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{3i\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$
$$e^{3i\theta} = (e^{i\theta})^3$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$
$$= \cos 3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$
$$= \cos^3\theta = \cos^2\theta\cos\theta - \sin^2\theta\sin\theta - i\sin^3\theta$$
$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$
$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$より、

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 12(2\cos^2\theta - 1) + 21\cos\theta - 8$$
$$= 12\cos^3\theta - 24\cos^2\theta + 12\cos\theta + 4$$
$$= 12t^3 - 24t^2 + 12t + 4$$

(別解)

加法定理と 2 倍角の公式より、

$$\cos 3\theta = (2\cos 2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$$
$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$$
$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 12(2\cos^2\theta - 1) + 21\cos\theta - 8$$
$$= 12\cos^3\theta - 24\cos^2\theta + 12\cos\theta + 4$$

$= 12t^3 - 24t^2 + 12t + 4$

[3]2つの数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ が次の関係式 (1)，(2) をともに満たすとき、あとの (1) 〜(4) の問いに答えなさい。ただし、p,q は実数とします。

$a_1 = 2$、$a_n + 1 = p^2 an + qb_n \quad (n = 1, 2, 3 \cdots) \qquad \cdots (1)$

$b_1 = 1$、$b_{n+1} = qa_n + p^2 b_n \quad （n = 1, 2, 3 \cdots ） \qquad \cdots (2)$

(1) $a_2 + b_2, a_3 + b_3$をそれぞれ p, q を用いて表しなさい。

$a_2 = p^2 a1 + qb_1 = 2p^2 + q$

$b_2 = qa_1 + p^2 b_1 = 2q + p^2$

$a_2 + b_2 = 3(p^2 + q)$

$a_3 = p^2(2p^2 + q) + (2q + p^2)$

$b_3 = q(2p^2 + q) + p^2(2q + p^2)$

$a_3 + b_3 = 3p^4 + 6p^2 q + 3q^2 = 3(p^2 + q)^2$

(2) a_n, b_nをそれぞれ p, q を用いて表しなさい。

$a_{n+1} + bn + 1 = (p^2 + q)(a_n - b_n)$

$a_1 + b_1 = 3$ であるから、

数列 $a_n + b_n$は初項 3、公比 $p^2 + q$ の等比数列である。

よって、$a_n + b_n = 3(p^2 + q)^{n-1} \cdots (3)$

$(1) - (2)$ より $a_{n+1} - b_{n+1} = (p^2 - q)(a_n - b_n)$

$a_1 - b_n = 1$ であるから、

数列 $a_n - b_n$は、初項 1、公比 $p^2 - q$ の等比数列である。

よって、$a_n - b_n = (p^2 - q)^{n-1} \cdots (4)$

(3)、(4) より、

$$a_n = \frac{3(p^2+q)^{n-1} + (p^2-q)^{n-1}}{2} \cdots (5)$$

$$b_n = \frac{3(p^2+q)^{n-1} - (p^2-q)^{n-1}}{2} \cdots (6)$$

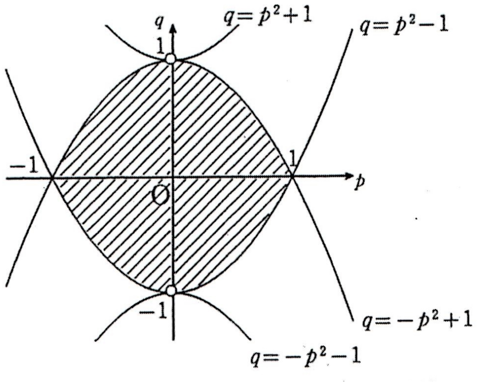
(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束するような実数 p, q の組 (p, q) を pq 平面に図示しなさい。

(5), (6) において、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束する条件は、

$-1 < p^2 + q \leqq 1$ かつ $-1 < p^2 - q \leqq 1$ であるから,

この不等式の表す領域を pq 平面に図示すると下の図の斜線部分となる。

ただし、2 点 $(0, 1), (0, -1)$ を除いた境界線を含む。



(4) (3) のとき、$p+q$ の最大値、最小値を求めなさい。

$p + g = k \cdots (7)$

これは点 $(0, k)$ を通り、傾き -1 の直線を表す。k が最大となるのは、

(7) の直線が、放物線 $q = -p^2 + 1 \cdots (8)$ と接するときである。

(7), (8) から q を消去して整理すると、$p^2 - p + k - 1 = 0 \cdots (9)$

(9) の判別式を D_1 とおくと、$D_1 = (-1)^2 - 4(k-1) = -4k + 5$

$D_1 = 0$ より、$k = \dfrac{5}{4}$

k が最小となるのは、(7) の直線が、放物線 $q = p^2 - 1 \cdots (10)$ と接するときである。

(7), (10) から q を消去して整理すると、$p^2 + p - k - 1 = 0 \cdots (11)$

(11) の判別式を D_2とおくと、$D_2 = 1^2 - 4(-k-1) = 4k + 5$

$D_2 = 0$ より $k = -\dfrac{5}{4}$

したがって、$p + q$ の最大値は$\dfrac{5}{4}$，最小値は $-\dfrac{5}{4}$