秋田県教員採用試験　数B

平成31 年1 月24 日

1　2018年度　中学校・高等学校

1. 次の（1）～（5）の問いに答えよ。

(1) 3次元空間の2つのベクトル $\vec{a}=(1,0,1),\vec{b}=(-2,-t,0)$ に 対して、
$2\vec{a}+\vec{b}$ と $-2\vec{a}+\vec{b}$ が垂直であるとき、正の数 t の値を求めよ。

2つのベクトルが垂直の時、その内積は0であることを利用する。

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$、$|\vec{b}|=\sqrt{t^2+4}$

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(-2\vec{a}+\vec{b})=0$

$-4|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b^2}|=0$

$-4\cdot 2+(t^2+4)=0$

$t^2=4$

$t=\pm 2$

$t>0$ より $t=2$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$、$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$ である三角形ABCがあり、その外心をO とする。

1 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。
余弦定理を用いて、内積を求める。

$$\text{余弦定理}\quad \cos A=\frac{\overrightarrow{|AB|}^2+\overrightarrow{|AC|}^2-\overrightarrow{|BC|}^2}{2\overrightarrow{|AB|}\cdot\overrightarrow{|AC|}}\text{より}$$

$$\cos A = \frac{3+2-3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = 1$$

よって内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1$

2 $\overrightarrow{AO} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$を満たす実数 s, t を求めよ。

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$、$\overrightarrow{AC} = \vec{c}$とする。

$\overrightarrow{AO} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$を (a) とする。

O が外心であることより、$|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}|$ であることが分かる。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$$
$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO})^2 = \overrightarrow{OB}^2$$
$$|\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2$$
$$|\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$
$$3 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = 0$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \frac{3}{2} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$$
$$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AO})^2 = \overrightarrow{OC}^2$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$
$$2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = 0$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = 1 \tag{2}$$

(a) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} &= (s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= s|\overrightarrow{AB}|^2 + t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= 3s + t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1$ より

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = 3s + t$$

(2) より

$$\frac{3}{2} = 3s + t$$

同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} &= (s\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= s\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + t|\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= s + 2t\end{aligned}$$

(3) より

$$1 = s + 2t$$

これらより

$$\begin{cases} 3s + t = \frac{3}{2} \\ s + t = 1 \end{cases}$$

よって

$$s = \frac{2}{5} \quad , \quad t = \frac{3}{10}$$

(3) $\vec{a} = (1, -1, -1)$,$\vec{b} = (3, -2, 1)$ のとき、$\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{b} - \vec{a}$ が垂直となるような t の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\vec{a} + t\vec{b} &= (1, -1, -1) + t(3, -2, 1) \\ &= (1 + 3t, -1 - 2t, -1 + t) \\ \vec{b} - \vec{a} &= (3, -2, 1) - (1, -1, -1) \\ &= (2, -1, 2)\end{aligned}$$

$(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ になればよい。

$$(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$2(1 + 3t) - (-1 - 2t) + 2(-1 + t) = 0$$

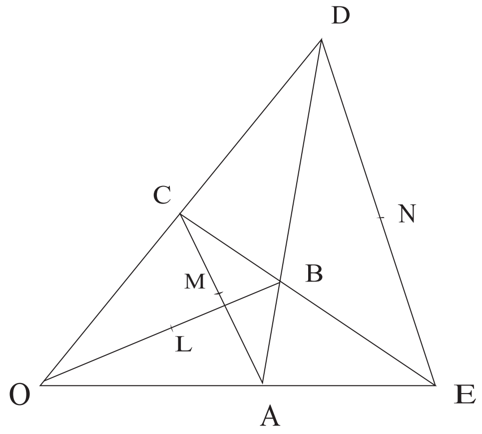
$$2 + 6t + 1 + 2t - 2 + 2t = 0$$

$$10t + 1 = 0$$

$$10t = -1$$

$$t = -\frac{1}{10}$$

(4) 平面上に四角形 OABC がある。この四角形の頂点 O,A,B,C について、
$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。
$|\vec{a}|=4$、$|\vec{b}|=\sqrt{19}$、$\vec{a}\cdot\vec{b}=16$、$\vec{b}\cdot\vec{c}=14$、$\vec{c}\cdot\vec{a}=8$ であるとき、次の問いに答えよ。



1 $\vec{c}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ で表せ。

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とする。

$\vec{b}\cdot\vec{c}=14$ より
$\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=14$
$x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=16$、$|\vec{b}|=\sqrt{19}$ より
$16x+19y=14$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=8$ より
$(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{a}=8$

$x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$、$|\vec{a}| = 14$ より
$16x + 16y = 8$

これらより

$$\begin{cases} 16x + 19y = 14 \\ 16x + 16y = 8 \end{cases}$$

よって
$x = -\frac{3}{2}, y = 2$

$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 2$

2 直線 AB と直線 OC の交点を D、直線 BC と直線 OA との交点を E とする。また直線 OB の中点を L、線分 AC の中点を M、線分 DE の中点を N とする。このとき、3 点 L、M、N が一直線上にあることを示し、$|\vec{LM}| : |\vec{LN}|$ を求めよ。

問題文より
$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$、$\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$
であることが分かる。
また 1.より　$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$　であることを利用する。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \\
&= \frac{1}{2}(\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}) \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}) \\
&= \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$
$\overrightarrow{OD} = k\vec{c}$ また $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + l\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= k\vec{c} \\ &= k(-\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= -\frac{3}{2}k\vec{a} + 2k\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \vec{a} + l\overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + l(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \vec{a} + l(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-l)\vec{a} + l\vec{b}\end{aligned}$$

$k\vec{c} = \vec{a} + l\overrightarrow{AB}$ より
$-\frac{3}{2}k\vec{a} + 2k\vec{b} = (1-l)\vec{a} + l\vec{b}$

これより

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}k = 1 - l \\ 2k = l \end{cases}$$

$2k = l$ を代入して
$-\frac{3}{2}k = 1 - 2k$
$-\frac{1}{2}k = 1$
よって $k = 2,\quad l = 4$

これらを $\overrightarrow{OD} = -\frac{3}{2}k\vec{a} + 2k\vec{b}$ に代入する。

$\overrightarrow{OD} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$

$\overrightarrow{OE} = s\vec{a}$ また $\overrightarrow{OE} = \vec{c} + t\vec{BC}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OE} &= \vec{c} + t\overrightarrow{BC} \\
&= \vec{c} + t(\vec{b} - \vec{c})
\end{aligned}
$$

ここで
$\vec{c} = -\dfrac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$
$\vec{c} - \vec{b} = -\dfrac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$
$\vec{b} - \vec{c} = \dfrac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}$

これを代入する。
$\vec{c} = t(\vec{b} - \vec{c})$