平成29年度　秋田県
公立学校教諭等採用候補者選考試験
高等学校教諭　数学科

1.　次の問いに答えよ。ただし,（1）,（2）,（3）は結果のみ解答欄に記入せよ。

(1)　次の値を求めよ。

① $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k$

k に数字を入れて計算してみる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k &= {}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 + {}_{10}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_8 + {}_{10}\mathrm{C}_9 + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \\ &= 2_{10}\mathrm{C}_0 + 2_{10}\mathrm{C}_1 + 2_{10}\mathrm{C}_2 + 2_{10}\mathrm{C}_3 + 2_{10}\mathrm{C}_4 + {}_{10}\mathrm{C}_5 \\ &= 2\times\ 1 + 2\times\ 10 + 2\times\ 45 + 2\times\ 120 + 2\times\ 210 + 252 \\ &= 2 + 20 + 90 + 240 + 420 + 252 \\ &= 1024\end{aligned}$$

二項定理を利用した解法。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k &= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k\cdot 1^k\cdot 1^{(10-k)} \\ &= (1+1)^{10} \\ &= 2^{10} \\ &= 1024\end{aligned}$$

② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$

$n=1$ のとき　$(-1)^{1-1}\cdot\frac{1}{1} = \ \ 1$

$n=2$ のとき　$(-1)^{2-1}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$n=3$ のとき　$(-1)^{3-1}\cdot\frac{1}{3} = \ \ \frac{1}{3}$

$n=4$ のとき　$(-1)^{4-1}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\vdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = \underline{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots}$$

$\frac{1}{1+x}$ のテーラー（マクローリン）展開を利用する。

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

左辺を 0 から x まで積分

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = [\log|1+x|]_0^x$$
$$= \log|1+x| - \log 1$$

対数の性質より　$\log 1 = 0$

$$= \log|1+x|$$

右辺を 0 から x まで積分

$$\int_0^x (1-x+x^2-x^3+\cdots)dx = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

左辺 $=$ 右辺より

$$\log|1+x| = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$x = 1$ を代入

$$\log|1+1| = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} + \cdots$$

$$\log 2 = \underline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \log 2$$

(2)　ある高校の全校生徒の男女比は $5:4$ である。また, この高校の男子生徒の 40 %, 女子生徒の 20 %がメガネをかけている。
この高校の生徒を無作為に 1 人選んだとき, その生徒がメガネをかけていた。
この生徒が男子生徒である確率を求めよ。

表 1: 問題を表にしたもの

	男子生徒	女子生徒
メガネをかけている	40 %	20 %
メガネをかけていない	60 %	80 %

求めるもの：
　無作為に選んだ 1 人がメガネをかけた男子生徒であるの確率

メガネをかけた生徒の比率は

$$2.8 = \begin{cases} 5\times\ 0.4 = 2 & \text{全校生徒男子比×メガネ男子比} \\ 4\times\ 0.2 = 0.8 & \text{全校生徒女子比×メガネ女子比} \end{cases}$$

なので、
　メガネをかけている男子：メガネをかけている女子 $= 2:0.8$
である。

$$\frac{\text{メガネをかけている男子生徒}}{\text{メガネをかけている生徒}} = \frac{2}{2.8} = \frac{5}{7}$$

(3)　1 以上 2016 以下の整数のうち, 23 で割った余りが 7 で割った余りより小さくなる整数は何個あるか求めよ。

1 以上 2016 以下　⋯　$1 \leqq x \leqq 2016$
23 で割った余り　⋯　0〜22
7 で割った余り　⋯　0〜7

23 の倍数に近い数字を確認してみる。

表 2: それぞれ 7 と 23 で割った時のあまり

	21	22	23	24	25	26	27	28	29
7	-	1	2	3	4	5	6	0	-
23	-	23	0	1	2	3	4	5	-

計算してみると 23〜27 が小さくなっており、5 コあることがわかる。
このように計算していくと
46〜48　: 3 コ
69　: 1 コ
92〜97　: 6 コ
115〜118 : 4 コ
138〜139 : 2 コ
161　: 0 コ　←ここまでがループなのがわかる。足して 21
184〜188 : 5 コ
207〜209 : 3 コ
・
・
・

161 の塊が何個あるかを計算する。
$2016 \div 161 = 12 \cdots 84$
あまりが 84 なので 0〜84 までの間に何個あったのかを計算する。
$5 + 3 = 8$
合計は
$12 \times 21 + 8 = 261$

(4)　三角形 ABC において, 内接円と辺 BC, 辺 CA, 辺 AB との接点をそれぞれ D, E, F とする。3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わることを示せ。

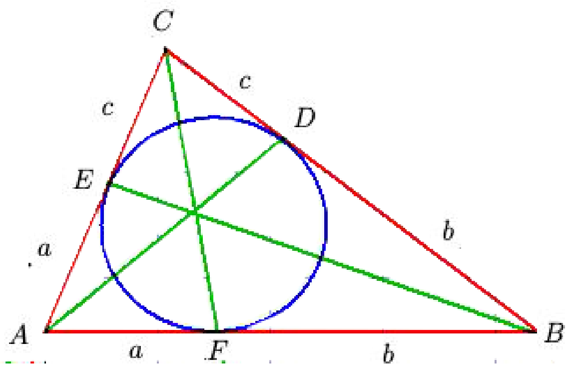

図 1: 四角形 OABC

チェバの定理より

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

内接円の接点より

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

チェバの定理の逆により、一点で交わる。

(5)　次の不等式を解け。

① $\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x > \dfrac{\sqrt{5}}{4} \quad \left(0 \leqq\ x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

三角関数の合成を利用する。

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right) > \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

このままでは計算しずらいのでθの状態で計算する。

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta\right) > \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\{\sin(x+\theta)\} > \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin(x+\theta) > \frac{1}{2}$$

$\sin(x+\theta) > \dfrac{1}{2}$より　　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x+\theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$

θを移項して　　$\dfrac{\pi}{6} - \theta \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi - \theta$

xの範囲は$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$なので　　$\dfrac{\pi}{6} - \theta \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$より　　$\theta = arc\cos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\therefore \frac{\pi}{6} - arc\cos\frac{2}{\sqrt{5}} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

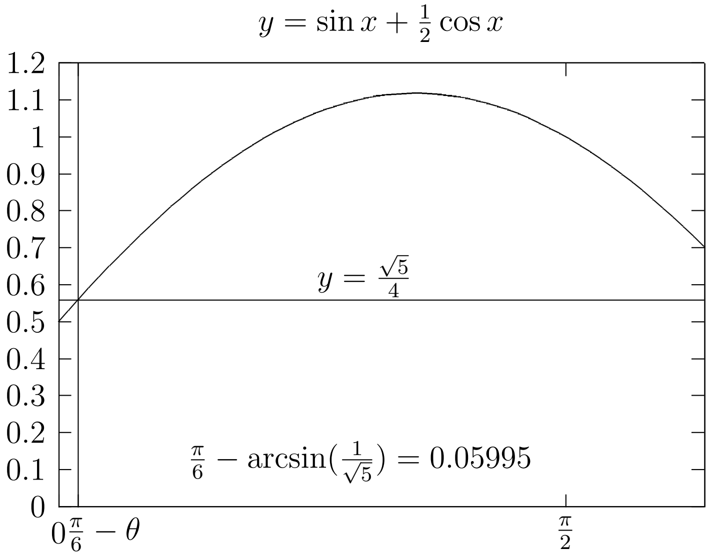

図 2: 不等式を実際にグラフで表わしたもの

② $\dfrac{1}{2}\{\log_2(2-\sqrt{x+1})\}^2+\log_{\frac{1}{2}}(2-\sqrt{x+1})^2-6>0$

対数の性質より、2 乗を前に出すことができる。

$$\frac{1}{2}\{\log_2(2-\sqrt{x+1})\}^2+2\log_{\frac{1}{2}}(2-\sqrt{x+1})-6>0$$

底の変換公式を利用し、$\log_2$ に合わせる。

$$\frac{1}{2}\{\log_2(2-\sqrt{x+1})\}^2+2\cdot\frac{\log_2(2-\sqrt{x+1})}{\log_2\frac{1}{2}}-6>0$$

$\log_2\dfrac{1}{2}=-1$ なので、

$$\frac{1}{2}\{\log_2(2-\sqrt{x+1})\}^2-2\log_2(2-\sqrt{x+1})-6>0$$

$t=\log_2(2-\sqrt{x+1})$ と置くと、

$$\frac{1}{2}t^2-2t-6>0$$

$\dfrac{1}{2}$ でくくる。

$$\frac{1}{2}(t^2-4t-12)>0$$
$$(t+2)(t-6)>0$$
$$t=-2,6$$
$$t<-2,6<t$$

$t=\log_2(2-\sqrt{x+1})$ の対数の真数は正であるから、

$$2-\sqrt{x+1}>0$$
$$2>\sqrt{x+1}$$
$$4>x+1$$
$$3>x \qquad \cdots\ (1)$$

上の計算より、左辺が 0 より大きくなるのは、

$$\begin{cases}\log_2(2-\sqrt{x+1})<-2 & \cdots\ (2)\\ \log_2(2-\sqrt{x+1})>6 & \cdots\ (3)\end{cases}$$

の場合である。

(2) のとき

$\log_2(2-\sqrt{x+1}) < -2$

$\log_2(2-\sqrt{x+1}) < \log_2 2^{-2}$

$2-\sqrt{x+1} < 2^{-2}$

$2-\sqrt{x+1} < \frac{1}{4}$

$2-\frac{1}{4} < \sqrt{x+1}$

$\frac{7}{4} < \sqrt{x+1}$

$\frac{49}{16} < x+1$

$\frac{49}{16} - 1 < x$

$\frac{33}{16} < x$

(3) のとき

$\log_2(2-\sqrt{x+1}) > 6$

$\log_2(2-\sqrt{x+1}) > \log_2 2^6$

$2-\sqrt{x+1} > 2^6$

$2-\sqrt{x+1} > 64$

$2-64 > \sqrt{x+1}$

$-62 > \sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}$が -62 より小さくなることはないので不適。

$\therefore \frac{33}{16} < x < 3$

(6)　複素数平面上で $z_0 = 3(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$z_1 = \dfrac{1-i}{2}z_0$, $z_2 = -\dfrac{1}{z_0}$ の表す点を, それぞれ P_0 , P_1 , P_2 とする。
原点 O , P_0 , P_1 , P_2 が同一円周上にあるとき, z_0の値を求めよ。

円の中心を $z_c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$とおくと

$$|z_0 - z_c| = |z_1 - z_c| = |z_2 - z_c| = |z_c|$$

$z = a + ib$ のとき

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\overline{z}} \\ &= \sqrt{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$|z| = r$$

$$z\overline{z} = r^2$$

$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$のとき

$$|z_1 + z_2| = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

$$|z_0 - z_c| = |z_c|$$

$$(z_0 - z_c)(\overline{z_0} - \overline{z_c}) = z_c\overline{z_c}$$

$$z_0\overline{z_0} - z_0\overline{z_c} - z_c\overline{z_0} + z_c\overline{z_c} = z_c\overline{z_c}$$

$$z_0\overline{z_0} = z_0\overline{z_c} + \overline{z_0}z_c \qquad \cdots \ (1)$$

$$|z_1 - z_c| = |z_c|$$

$$(z_1 - z_c)(\overline{z_1} - \overline{z_c}) = z_c\overline{z_c}$$

$$z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_c} - z_c\overline{z_1} + z_c\overline{z_c} = z_c\overline{z_c}$$

$$z_1\overline{z_1} = z_1\overline{z_c} + \overline{z_1}z_c \qquad \cdots \ (2)$$

$$|z_2 - z_c| = |z_c|$$

$$(z_2 - z_c)(\overline{z_2} - \overline{z_c}) = z_c\overline{z_c}$$

$$z_2\overline{z_2} - z_2\overline{z_c} - z_c\overline{z_2} + z_c\overline{z_c} = z_c\overline{z_c}$$

$$z_2\overline{z_2} = z_2\overline{z_c} + \overline{z_2}z_c \qquad \cdots \ (3)$$

$$z_0 = 3(\cos\theta + i\sin\theta) = 3e^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} a + bi &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1-i}{2} z_0 \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} i) z_0 \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\frac{(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right\} z_0 \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\} z_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right\} z_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) z_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) z_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} z_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \ 3e^{i\theta} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} (e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \ e^{i\theta}) \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$$z_2 = -\frac{1}{z_0} = -\frac{1}{3} e^{-i\theta}$$

$z_0 = 3e^{i\theta}, z_1 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}, z_2 = -\dfrac{1}{3}e^{-i\theta}$だから、

(1) より

$$
\begin{aligned}
&z_0\overline{z_0} = 3e^{i\theta}\cdot 3e^{-i\theta} = 9\\
&z_0\overline{z_c} = 3e^{i\theta}\cdot re^{-i\varphi} = 3re^{i(\theta-\varphi)}\\
&\overline{z_0}z_c = 3e^{-i\theta}\cdot re^{i\varphi} = 3re^{-i(\theta-\varphi)}\\
&9 = 3re^{i(\theta-\varphi)} + 3re^{-i(\theta-\varphi)}\\
&\quad = 3r(e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)})\\
&\quad = 6r\cos(\theta-\varphi) \qquad \cdots \ (4)
\end{aligned}
$$

(2) より

$$
\begin{aligned}
&z_1\overline{z_1} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})} = \frac{9}{2}\\
&z_1\overline{z_c} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}\cdot re^{-i\varphi} = \frac{3}{\sqrt{2}}re^{i(\theta-\varphi-\frac{\pi}{4})}\\
&\overline{z_1}z_c = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})}\cdot re^{i\varphi} = \frac{3}{\sqrt{2}}re^{-i(\theta-\varphi-\frac{\pi}{4})}\\
&\frac{9}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}re^{i(\theta-\varphi-\frac{\pi}{4})} + \frac{3}{\sqrt{2}}re^{-i(\theta-\varphi-\frac{\pi}{4})}
\end{aligned}
$$

右辺を $\cos\theta + i\sin\theta$に直して計算してみる。
$i\sin\theta$が正負で消えるので、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{\sqrt{2}}r\left\{\cos(\theta-\varphi-\frac{\pi}{4}) + \cos(\theta-\varphi-\frac{\pi}{4})\right\}\\
&= \frac{6}{\sqrt{2}}r\cos\left\{(\theta-\varphi)-\frac{\pi}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

$\cos(\alpha-\beta)$ を利用する。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6}{\sqrt{2}}r\left\{\cos(\theta-\varphi)\cos\frac{\pi}{4} + \sin(\theta-\varphi)\sin\frac{\pi}{4}\right\}\\
&= \frac{6}{\sqrt{2}}r\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(\theta-\varphi)+\sin(\theta-\varphi)\}\right]\\
&= \frac{6}{2}r\{\cos(\theta-\varphi)+\sin(\theta-\varphi)\}\\
&= 3r\{\cos(\theta-\varphi)+\sin(\theta-\varphi)\} \qquad \cdots \ (5)
\end{aligned}
$$

(3) より

$$z_2\overline{z_2} = -\frac{1}{3}e^{-i\theta}\cdot(-\frac{1}{3}e^{i\theta}) = \frac{1}{9}$$

$$z_2\overline{z_c} = -\frac{1}{3}e^{-i\theta}\cdot re^{-i\varphi} \quad = -\frac{1}{3}re^{-i(\theta+\varphi)}$$

$$\overline{z_2}z_c = -\frac{1}{3}e^{i\theta}\cdot re^{i\varphi} = -\frac{1}{3}re^{i(\theta+\varphi)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{9} &= -\frac{1}{3}re^{-i(\theta+\varphi)} + \left(-\frac{1}{3}re^{i(\theta+\varphi)}\right)\\ &= -\frac{1}{3}r\left(e^{-i(\theta+\varphi)} + e^{i(\theta+\varphi)}\right)\\ &= -\frac{2}{3}r\cos(\theta+\varphi) \qquad \cdots\ (6)\end{aligned}$$

(4) より

$$9 = 6r\cos(\theta-\varphi)$$

$$\cos(\theta-\varphi) = \frac{3}{2r} \qquad \cdots\ (7)$$

$\sin^2(\theta-\varphi) + \cos^2(\theta-\varphi) = 1$ より

$$\begin{aligned}\sin^2(\theta-\varphi) &= 1 - \cos^2(\theta-\varphi)\\ \sin(\theta-\varphi) &= \pm\sqrt{1-\cos^2(\theta-\varphi)}\\ &= \pm\sqrt{1-\frac{9}{4r^2}} \qquad \cdots\ (8)\end{aligned}$$

(7)、(8) を (5) に代入する。

$$\frac{9}{2} = 3r\{\cos(\theta-\varphi) + \sin(\theta-\varphi)\}$$

$$\frac{9}{2} = 3r\left(\frac{3}{2r} \pm \sqrt{1-\frac{9}{4r^2}}\right)$$

$$\frac{3}{2r} = \frac{3}{2r}\underline{\pm\sqrt{1-\frac{9}{4r^2}}}$$

↑ここが 0 ならば、等号が成り立つ。

上記より$\underline{\sin(\theta-\varphi)} = \sqrt{1-\frac{9}{4r^2}}\ \underline{=0}$なので

$$\sin(\theta-\varphi)=0$$
$$\theta-\varphi=0,\pi$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より

$$\theta-\varphi=0$$
$$\theta=\varphi$$

$\theta=\varphi$ より

$$\cos(\theta-\varphi)=\frac{3}{2r}$$

$$\cos 0=\frac{3}{2r}$$

$$1=\frac{3}{2r}$$

$$r=\frac{3}{2}$$

求めたθ、φ、r を (6) に代入する。

$$\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}r\cos(\theta+\varphi)$$

$$\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta=-\frac{1}{9}$$

$$2\cos^2\theta-1=-\frac{1}{9}$$

$$2\cos^2\theta=\frac{8}{9}$$

$$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$$

$$\cos\theta=\pm\frac{2}{3}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\sin^2\theta = \frac{5}{9}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

z_0に求めた $\cos\varphi$、$\sin\varphi$ を代入する。

$$\begin{aligned} z_0 &= 3\left(\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \\ &= 2 + \sqrt{5}i \end{aligned}$$

2. 次の問いに答えよ。

(1) $x^2-2ix-1-2i=0$ を満たす複素数 x を, $a+bi$（a,b は実数）の形に表せ。

$x^2-2ix-1-2i=0$ は $x^2-2ix+(-i)^2=2i$ と書ける。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^2-2ix+(-i)^2 \\
&= (x-i)^2 \\
(\text{右辺}) &= 2i \\
&= 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2e^{i\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

$$(x-i)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

両辺のルートをとると

$$x-i = \underline{\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\begin{aligned}
&\,\,\| \\
&\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \pm(1+i)
\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}
x-i &= \pm(1+i) \\
x &= i\pm(1+i) \\
&= i\pm1\pm i \\
&= \pm1+(1\pm1)i
\end{aligned}$$

$a+bi$ の形で表すと

$$x = \pm1+(1\pm1)i$$

$$= \begin{cases} 1+2i \\ -1 \end{cases}$$

(2)　授業中に, ある生徒を指名して,（1）の問題を解かせたところ,

$$x = \frac{2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(-1-2i)}}{2} = i \pm \sqrt{2i}$$

と板書し,「先生, $a + bi$ の形にできません。」と困った様子で
アドバイスを求めてきた。
　この後, どのように授業展開するか, 記せ。
ただし, 授業の残り時間は 20 分とする。

ド・モアブルの定理
　n が整数のとき
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
$$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
　つまり
$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
　と書きなおすことができる。

i をある数の 2 乗で表わすためには、ド・モアブルの定理
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = i$$
を利用する。

それぞれ
$$i = \underbrace{\cos 2\theta}_{=0} + i\underbrace{\sin 2\theta}_{=1}$$
ならば等号が成り立つので、

$$\begin{cases} \cos 2\theta = 0 \\ \sin 2\theta = 1 \end{cases}$$

を計算する。

どちらも満たすθは $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときである。

$$
\begin{aligned}
i &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\
&= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2
\end{aligned}
$$

と書くことができる。

先程計算したものを活用すると、

$$
\begin{aligned}
x &= i \pm \sqrt{2i} \\
&= i \pm \sqrt{2}\ \sqrt{i} \\
&= i \pm \sqrt{2}\ \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2} \\
&= i \pm \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\
&= i \pm (1 + i) \\
&= \begin{cases} 1 + 2i \\ -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

3. 平面上に四角形 OABC がある。

この四角形の頂点 O, A, B, C について, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = \sqrt{19}, \vec{a}\cdot\vec{b} = 16, \vec{b}\cdot\vec{c} = 14, \vec{c}\cdot\vec{a} = 8$ であるとき, 次の問いに答えよ。

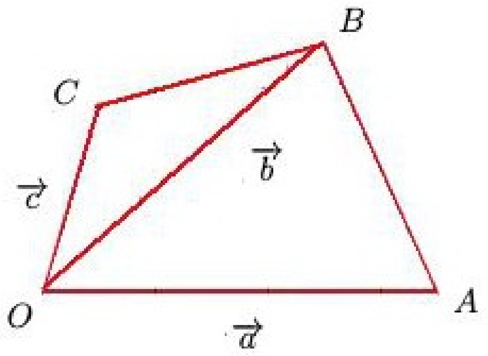

図 3: 四角形 OABC

(1) $\vec{c}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ。

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ と置く。

$$\begin{aligned}
\vec{c}\cdot\vec{a} &= (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\cdot\vec{a} \\
&= \alpha|\vec{a}|^2 + \beta\vec{a}\cdot\vec{b} \\
8 &= 16\alpha + 16\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{b}\cdot\vec{c} &= \vec{b}\cdot(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \\
&= \alpha\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta|\vec{b}|^2 \\
14 &= 16\alpha + 19\beta
\end{aligned}$$

求めた式を利用し、α と β を求める。

$$\begin{cases} 8 = 16\alpha + 16\beta \\ 14 = 16\alpha + 19\beta \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8 = 16\alpha + 16\beta \\ -)14 = 16\alpha + 19\beta \\ \hline -6 = \qquad -3\beta \\ \beta = 2 \end{array}$$

$8 = 16\alpha + 16\beta$にβを代入

$$8 = 16\alpha + 16 \cdot 2$$
$$-16\alpha = 32 - 8$$
$$-16\alpha = 24$$
$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

求めた α と β を $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ 入れる。

$$\overrightarrow{c} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$$

(2)　直線 AB と直線 OC の交点を D, 直線 BC と直線 OA の交点を E とする。
また, 線分 OB の中点を L, 線分 AC の中点を M, 線分 DE の中点を N, とする。
このとき, 3 点 L, M, N が一直線上にあることを示し, $|\overrightarrow{\mathrm{LM}}| : |\overrightarrow{\mathrm{LN}}|$ を求めよ。

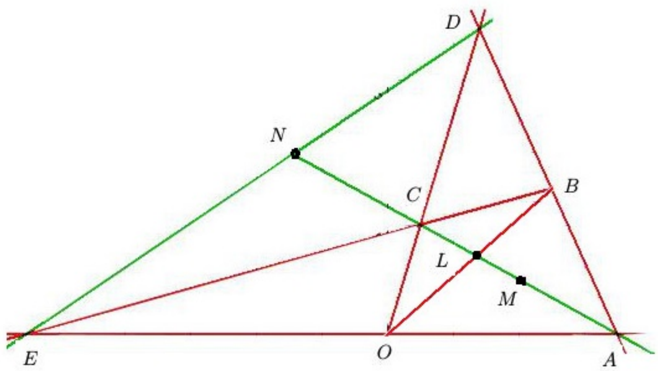

図 4: 四角形 OABC

OD は直線 AB 上にあるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{a} + s(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\ &= (1-s)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

と表わされる。

OD は直線 OC 上にあるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= t\overrightarrow{c} \\ &= -\frac{3t}{2}\overrightarrow{a} + 2t\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

と表わされる。

交点 OD において両者は等しいので

$$\begin{cases} 1 - s = -\dfrac{3t}{2} & \cdots\ \vec{a}\text{でくくったもの} \\ s = 2t & \cdots\ \vec{b}\text{でくくったもの} \end{cases}$$

を求める。

$1 - s = -\dfrac{3t}{2}$ に $s = 2t$ を代入

$$1 - 2t = -\frac{3t}{2}$$

$$\frac{3t}{2} - 2t = -1$$

$$-\frac{t}{2} = -1$$

$$t = 2$$

$s = 2t$ に $t = 2$ を代入

$$s = 4$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$

OE は直線 BC 上にあるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{c} + s(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) \\ &= (1-s)\overrightarrow{c} + s\,\overrightarrow{b} \\ &= (1-s)\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b}\right) + s\,\overrightarrow{b} \\ &= \left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b} + \frac{3s}{2}\overrightarrow{a} - 2s\,\overrightarrow{b}\right) + s\,\overrightarrow{b} \\ &= \frac{3}{2}(s-1)\overrightarrow{a} + (2-s)\,\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

と表わされる。

OE は直線 OA 上にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = t\,\overrightarrow{a}$$

と表わされる。

交点 OE において両者は等しいので

$$\begin{cases}\frac{3}{2}(s-1) = t & \cdots\ \overrightarrow{a}\text{でくくったもの} \\ 2-s=0 & \cdots\ \overrightarrow{b}\text{でくくったもの}\end{cases}$$

を求める。

$2-s=0$ より

$$s=2$$

$\frac{3}{2}(s-1)=t$ に $s=2$ を代入

$$\frac{3}{2}(2-1)=t$$

$$t=\frac{3}{2}$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{a}$

L は線分 OB の中点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{b}}{2}$$

M は線分 AC の中点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}}{2} \\ &= \frac{\overrightarrow{a} + (-\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})}{2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

N は線分 DE の中点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ON}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-3\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} + \frac{3}{2}\overrightarrow{a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}\right) \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}| : |\overrightarrow{\mathrm{LN}}|$ を求めるので

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{LM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} \\
&= \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) - \frac{\overrightarrow{b}}{2} \\
&= -\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{\overrightarrow{b}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \\
&= \left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right) - \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{LM}}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = 2\overrightarrow{\mathrm{LM}}$より、$L, M, N$ が一直線上にあることがわかる。

分かりやすいように$\overrightarrow{\mathrm{LN}}$も計算すると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{LN}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} \\
&= \left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right) - \frac{\overrightarrow{b}}{2} \\
&= 3\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{\overrightarrow{b}}{2}\right) \\
&= 3\overrightarrow{\mathrm{LM}}
\end{aligned}$$

である。

ゆえに L, M, N は一直線上にあり

$$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}| : |\overrightarrow{\mathrm{LN}}| = 1 : 3$$

である。

4.

$$xyz\text{ 空間に, 曲面 } C : z = \frac{x^2}{a^2} + y^2 (\text{ただし}, a > 0), \text{曲面 } D : x^2 + y^2 = 4$$

がある。次の問いに答えよ。

(1) 曲面 C と平面 $x = 0$ の交線を曲線 E とする。点 $P\,(3, 0, 1)$ と曲線 E 上を動く点 Q を結んだ直線 PQ を考える。
直線 PQ が xy 平面と交わる点を R とするとき, 点 R の軌跡を求めよ。

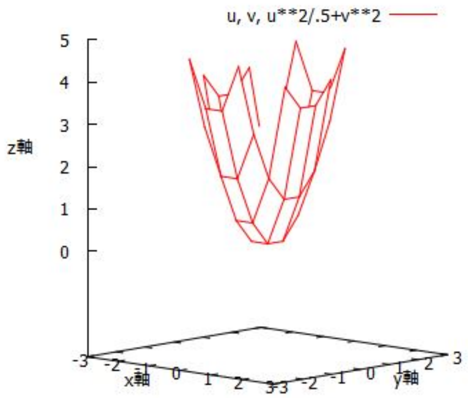

図 5: 曲面 C

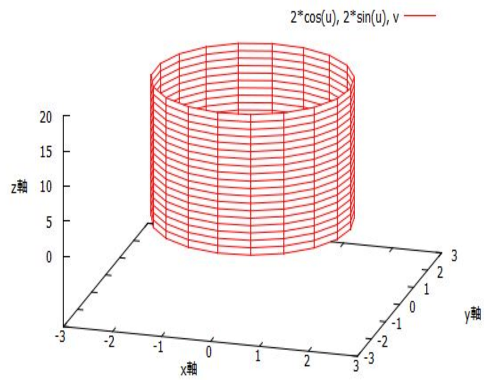

図 6: 曲面 D

曲面 C において $x = 0$ とおくと
$z = y^2$
曲線 E 上の点 Q は
$(0, t, t^2)$ (ただし、$-\infty < t < \infty$)
と表わされる。

直線 PQ 上の点 (x, y, z) は
$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (3, 0, 1) + s((0, t, t^2) - (3, 0, 1)) \\ &= (3(1-s), st, 1 + s(t^2 - 1))\end{aligned}$$
と表わされる。

R は xy 平面上の点だから $z=0$ である。

$$1+s(t^2-1)=0$$
$$s(t^2-1)=-1$$
$$s=-\frac{1}{t^2-1}$$

s が求められたので、t を求めていく

$$\begin{aligned} x &= 3(1-s) \\ &= 3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{3(t^2-1)}{t^2-1}+\frac{3}{t^2-1} \\ &= \frac{3t^2}{t^2-1} \end{aligned}$$

$$y=st=-\frac{t}{t^2-1}$$

$x=\dfrac{3t^2}{t^2-1}$, $y=-\dfrac{t}{t^2-1}$ より

$$x(t^2-1)=3t^2$$
$$t^2-1=\frac{3t^2}{x}$$

$$y(t^2-1)=-t$$
$$t^2-1=-\frac{t}{y}$$

$$\frac{3t^2}{x}=-\frac{t}{y}$$

$$\frac{3t^2\cdot y}{x}=-t$$

$$3t^2\cdot y=-t\cdot x$$
$$3t\cdot y=-x$$
$$t=-\frac{x}{3y}$$

$x = 3(1-s)$, $s = \dfrac{y}{t}$ より

$$x = 3(1-s)$$

$$\frac{x}{3} = 1 - s$$

$$\frac{x}{3} - 1 = -s$$

$$\frac{x}{3} - 1 = -\frac{y}{t}$$

$$t\left(\frac{x}{3} - 1\right) = -y$$

$$t = -\frac{y}{\frac{x}{3} - 1}$$

$$t = -\frac{3y}{x - 3}$$

整頓すると

$$-\frac{x}{3y} = -\frac{3y}{x-3}$$

$$-x(x-3) = -3y \cdot 3y$$

$$x(x-3) = 9y^2$$

ただし、$(3, 0)$ は除く

標準形に直すと

$x(x-3)=9y^2$

$x(x-3)-9y^2=0$

$x^2-3x-9y^2=0$

$$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-9y^2-\frac{9}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-9y^2-\frac{9}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-9y^2=\frac{9}{4}$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{9}-y^2=\frac{1}{4}$$

$$\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{9}-4y^2=1$$

$$\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}}{9\times\frac{1}{4}}-\frac{4y^2\times\frac{1}{4}}{1\times\frac{1}{4}}=1$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{(\frac{3}{2})^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$$

双曲線の方程式であることがわかる。

(2)　曲面 C と曲面 D および平面 $z=0$ によって囲まれた部分の体積 V を a を用いて表せ。

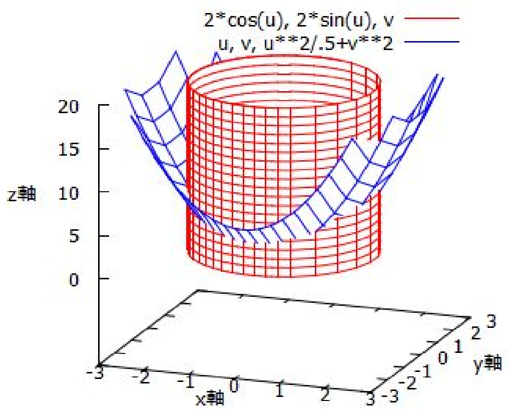

図 7: 曲面 C と曲面 D

$$V=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\frac{x^2}{a^2}+y^2\right)dy$$

図を見ると同じ大きさの部分が 4 つあることがわかるので、
計算しやすい部分の体積の 4 倍すると求めることができる。

$$\begin{aligned}
&=4\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(\frac{x^2}{a^2}+y^2\right)dy\\
&=4\int_0^2 dx\left[\frac{x^2}{a^2}y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}\\
&=4\int_0^2 dx\left\{\frac{1}{a^2}x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}\\
&=4\left[\left\{\int_0^2\frac{1}{a^2}x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right\}+\left\{\int_0^2\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right\}\right]\\
&=4\left[\frac{1}{a^2}\left\{\int_0^2 x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right\}+\frac{1}{3}\left\{\int_0^2(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right\}\right]
\end{aligned}$$

計算しづらいので、分けて計算していく。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^2 x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx \\ \displaystyle\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx \end{cases}$$

<u>$x = 2\sin\theta$ とおくと $dx = 2\cos\theta d\theta$ である。</u>

定義域はそれぞれ

$$\begin{aligned} 2 &= 2\sin\theta & 0 &= 2\sin\theta \\ 1 &= \sin\theta & 0 &= \sin \\ \theta &= \frac{\pi}{2} & \theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta)^2 \cdot \{4-(2\sin\theta)^2\}^{\frac{1}{2}} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \cdot \{4-(4\sin^2\theta)\}^{\frac{1}{2}} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \cdot \{4(\underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta})\}^{\frac{1}{2}} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \cdot (4\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \cdot 4\cos^2\theta d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta\cos\theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

2 倍角の定理より　$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2\theta)^2 d\theta \\
&= 4\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin 4\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0\right\} \\
&= 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\sin 2\pi\right) \\
&= 4\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{4-(2\sin\theta)^2\}^{\frac{3}{2}}\cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{4(1-\sin^2\theta)\}^{\frac{3}{2}}\cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{2\cdot\frac{3}{2}}\cos^{2\cdot\frac{3}{2}}\theta\cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^3\cos^3\theta\cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^4\cos^4\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^2(2\cos^2\theta)^2 d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta)^2 d\theta
\end{aligned}
$$

2倍角の定理より　$2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)^2 d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1) d\theta \\
&= 4\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\left\{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\sin 4\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0\right\} \\
&= 4\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{8}\sin 2\pi + \frac{1}{2}\sin\pi\right) \\
&= 4\left(\frac{3\pi}{4} + 0 + 0\right) \\
&= 3\pi
\end{aligned}
$$

求めたものを代入する。

$$
\begin{aligned}
V &= 4\left[\frac{1}{a^2}\left\{\int_0^2 x^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right\}+\frac{1}{3}\left\{\int_0^2(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right\}\right] \\
&= 4\left(\frac{1}{a^2}\cdot\pi+\frac{1}{3}\cdot 3\pi\right) \\
&= 4\left(\frac{\pi}{a^2}+\pi\right) \\
&= 4\pi\left(\frac{1}{a^2}+1\right)
\end{aligned}
$$

5.　次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は, 任意の$\varepsilon > 0$ に対し,
自然数 N が存在し, $N < n, N < m$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$となることである。
このことを利用して, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$のとき, $\{a_n\}$ が収束することを示せ。

$n > m$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n - a_m &= \left(1 + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(1 + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

$m > n$ のとき

$$\begin{aligned}
a_m - a_n &= \left(1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) - \left(1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}
\end{aligned}$$

$$a_n - a_m = \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

ゆえに

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right|$$

任意の$\varepsilon < 0$ に対して自然数 N を $\dfrac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$ となるように選ぶと
自然数 $N < n$、$N < m$ ならば

$$|a_n - a_m| < Max\left(\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{m-1}}\right) < \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$$

が成り立つので、数列 $\{a_n\}$ は収束する。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散することを示せ。

$\displaystyle\frac{1}{n} > \int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx$ だから

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > \underline{\int_{1}^{N+1}\frac{1}{x}dx}$$

$$\|$$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{N+1}\frac{1}{x}dx &= [\log x]_{1}^{N+1} \\ &= \log(N+1) - \log 1 \\ &= \log(N+1)\end{aligned}$$

ここで、$N \to \infty$ の極限をとると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > \underline{\lim_{N\to\infty}\log(N+1)}$$

$$\|$$

$$+\infty$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > +\infty$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散する。

この図は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ と $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ を表わしている。

緑で囲まれた部分の面積は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ を表わしている。

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ と $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ で囲まれた部分の面積（オレンジ色の部分）は

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ の面積より小さいが、無くなることはないので、

発散していることがわかる。

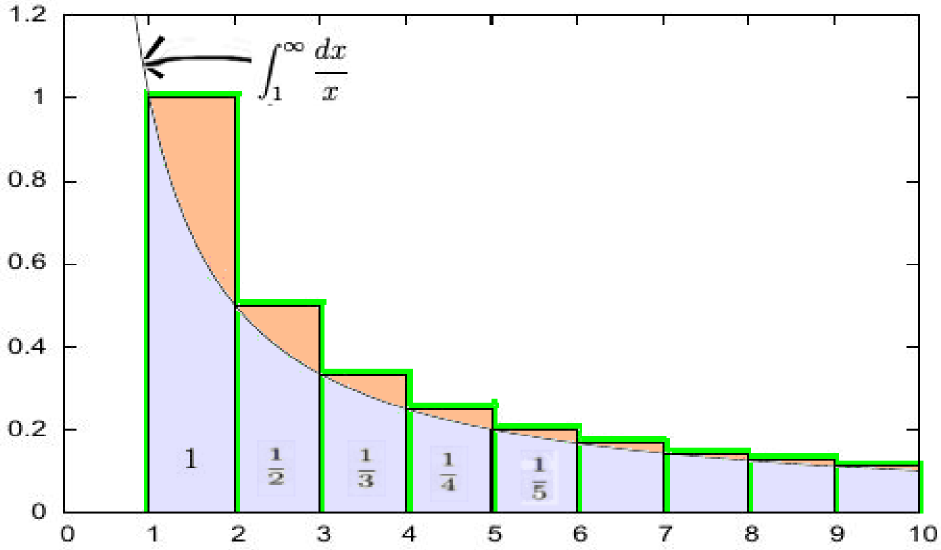

図 8: 発散を表わす図