令和２年度　沖縄県教員採用試験解
（中高・数学）

１. 次の問 (1)～(4) に答えなさい。

(1)　次の図のような円錐の展開図がある。母線の長さが 8cm、側面のおうぎ形の中心角が 270°のときの円錐の高さを求めなさい。

$$直径\times円周率\times\frac{中心角}{360^\circ}=弧の長さより$$

$$16\times\pi\times\frac{270^\circ}{360^\circ}=12\pi$$

底面の円周の長さと側面の弧の長さは等しいので、直径×円周率となり、

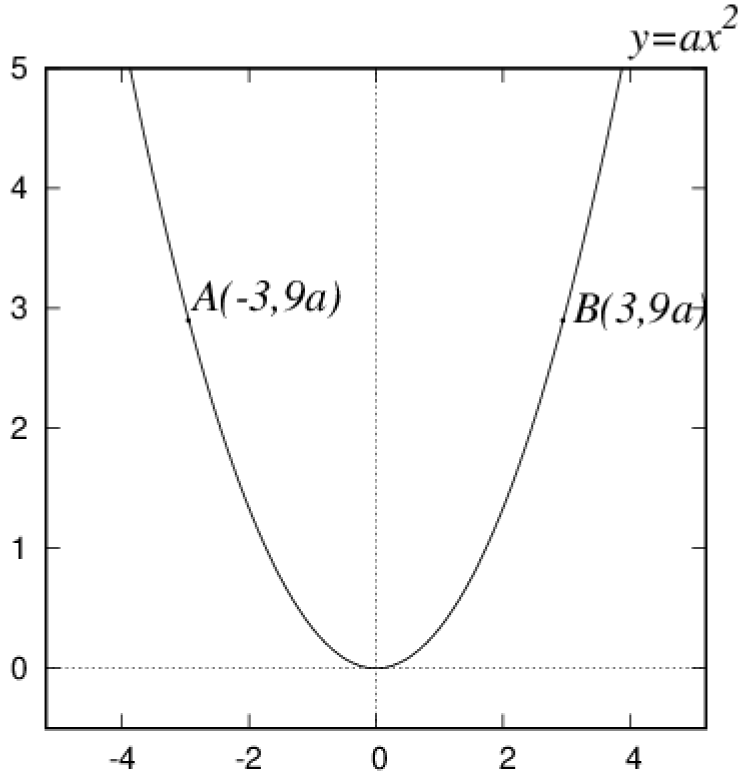
$$2\pi r=12\pi$$

$$r=6$$

高さを x とおくと、三平方の定理より

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{8^2-6^2}\\&=\sqrt{28}\\&=2\sqrt{7}\end{aligned}$$

(2)　次のグラフのように、関数 $y = ax^2$ のグラフ上に 2 点 A、B の x 座標はそれぞれ -3、3 である。△ OAB が直角二等辺三角形であるとき、a の値を求めなさい。ただし、$a > 0$ とする。



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-3-0、9a-0) = (-3、9a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3-0、9a-0) = (3、9a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{と}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{は垂直なので、}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\text{ より}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -9 + 81a^2 = 0$$

$$\begin{aligned} 81a^2 &= 9 \\ a^2 &= \frac{1}{9} \\ a &= \pm\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$a > 0$ より、　$\frac{1}{3}$

(3)　A、B2 つのサイコロを同時に投げ、A のサイコロの出る目の数を a、B のサイコロの出る目を b とするとき、$\frac{b}{a}$ が 1 より大きくなる確率を求めなさい。ただし、2 つのサイコロは 1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

A のサイコロを a、B のサイコロを b とする。

$\frac{b}{a} > 1$ より、$b > a$ となる。

a	b	
1	2〜6	5 通り
2	3〜6	4 通り
3	4〜6	3 通り
4	5、6	2 通り
5	6	1 通り

$$\frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

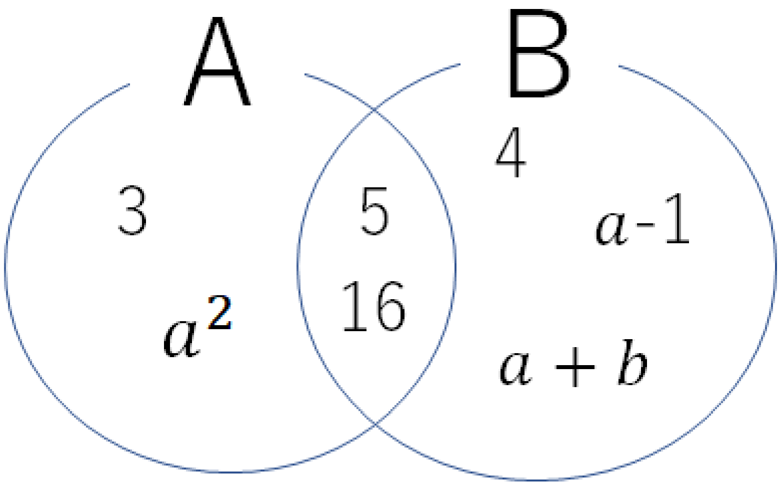
(4)　ある工場で製造された製品から 400 個を無作為に抽出して、調べたところ、不良品がその中に 3 個含まれていた。この工場で製造された 10000 個の製品に含まれていると考えられる不良品の数はおよそ何個であると考えられるか。

$$\begin{aligned} 400:3 &= 10000:x \\ 400x &= 30000 \\ x &= 75 \end{aligned}$$

よって、不良品の数は 75 個である。

2. 次の問 (1)〜(3) に答えなさい。

(1)　整数を要素とする2つの集合体A、BをA={3、5、a^2}、B={4、$a-1$、$a+b$、16} とするとき、$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{5、16\}$ となるような定数a、bを求めなさい。



$$a^2=16$$
$$a=\pm4$$
$a=4$ のとき、集合 B の $a-1$ を考えると、$4-3=1$ より×

よって $a=-4$

$a=-4$ のとき、$a+b$ を考えると $-4+b=5$ より、$b=9$

よって、$a=-4$、$b=9$

(2)　放物線 $y = x^2 - 3x + 2$ と直線 $y = 2x - k$ が異なる2点A、Bで交わるとき、線分ABの長さが4となる定数kの値を求めなさい。

$A\,(\alpha、2\alpha - k)$、$B\,(\beta、2\beta - k)$ とする。

点 B から垂直に引いた線と点 A から x 座標に平行な線を引き、交わった点を点 C とおく。

$\triangle\, ABC$ において三平方の定理より、

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)^2 + (2\beta - k(2\alpha - k))^2 &= 4^2 \\ (\beta - \alpha)^2 + 4(\beta - \alpha)^2 &= 16 \\ 5(\beta - \alpha)^2 &= 16 \\ (\beta - \alpha)^2 &= \frac{5}{16} \quad \cdots 1\end{aligned}$$

ここで、$y = x^2 - 3x + 12$ と $y = 2x - k$ は2の交点を持つため

解と係数の関係より、

$$x^2 - 3x + 2 = 2x - k$$

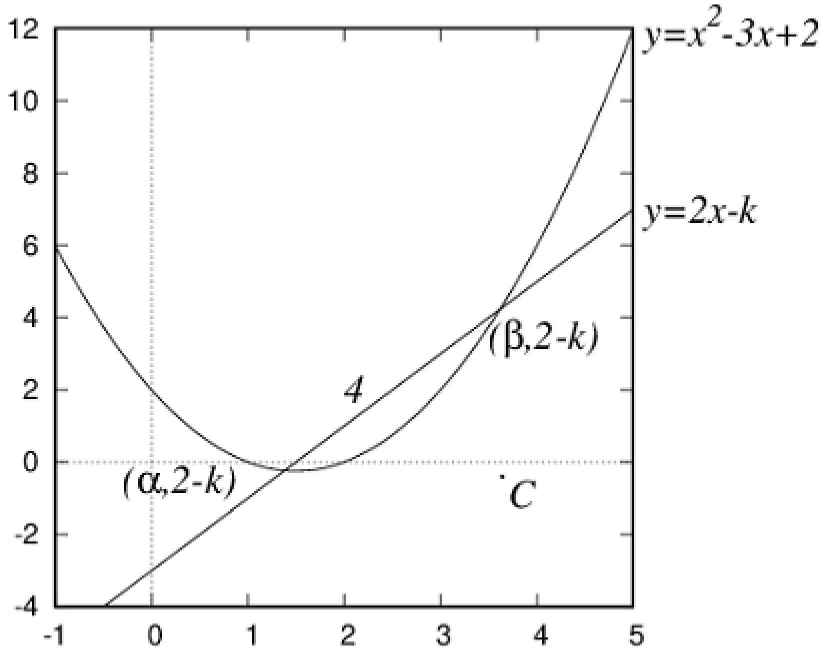
$$x^2 - 3x + 2 - 2x + k = 0$$

$$\alpha + \beta = 5 \quad \cdots 2$$

$$\alpha\beta = 2 + k \quad \cdots 3$$

2、3より
$$\begin{aligned}(\beta + \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4ab \\ &= 5^2 - 4(2 + k) \\ &= 17 - 4k \quad \cdots 4\end{aligned}$$

1、4より
$$\begin{aligned}17 - 4k &= \frac{16}{5} \\ 4k &= \frac{85 - 16}{5} \\ k &= \frac{69}{20}\end{aligned}$$



12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-1
0
1
2
3
4
5
y=x^2-3x+2
y=2x-k
(β,2-k)
4
(α,2-k)
C

(3)　4人でじゃんけんを1回行うとき、あいこになる確率を求めなさい。

全員のじゃんけんのパターンは　$3^4 = 81$ 通り
4人全員が同じになるのは　3通り
あいこになるのは、4人のうち2人が同じで残り2人が別々のときである。
なので、あいこになるのは、${}_4C_2 = 6$ 通り×　$3! = 36$ 通り
4人全員が同じになるのは3通りなので、$36 + 3 = 39$ 通り
よって、4人でじゃんけんを1回行うときあいこになる確率は

$$\frac{39}{3^4} = \frac{13}{27}\text{通り}$$

［別解］

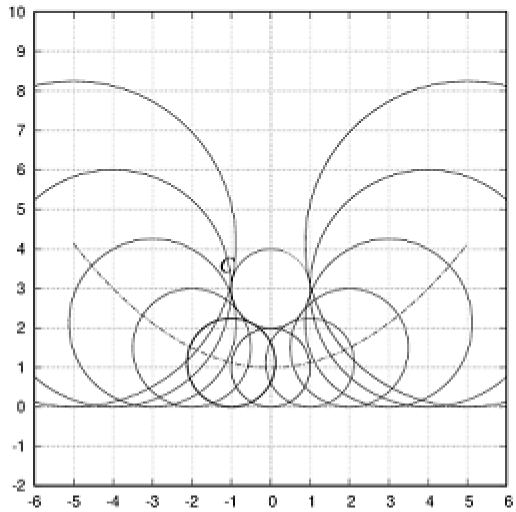
グーをぐ、チョキをち、パーをぱとおく

A	B	C	D
ぐ	ぐ	ぐ	ぐ
ぐ	ぐ	ち	ぱ
ぐ	ぐ	ぱ	ち
ぐ	ち	ぐ	ぱ
ぐ	ち	ち	ぱ
ぐ	ち	ぱ	ぐ
ぐ	ち	ぱ	ち
ぐ	ち	ぱ	ぱ
ぐ	ぱ	ぐ	ち
ぐ	ぱ	ち	ぐ
ぐ	ぱ	ち	ち
ぐ	ぱ	ち	ぱ
ぐ	ぱ	ぱ	ち

A がグーの時、あいこは13通り。
A がチョキやパーの時も同様なので、あいこのパターンは13×　3通り。
全員のじゃんけんのパターンは 3^4通り。
よって、　4人でじゃんけんを1回行うときあいこの確率は、$\frac{13\times 3}{3^4} = \frac{13}{27}$通り

3. 次の問 (1)〜(2) に答えなさい。

(1)　座標平面上で点 (0、3) を中心とする半径 1 の円を C とする。C に外接し x 軸に接する円の中心 P(a、b) が描く図形の方程式を求めなさい。



CP の距離は P(a、b)、C(0、3) より、$\sqrt{\mathrm{a}^2+(\mathrm{b}-3)^2}=\mathrm{CP}$
円 P の半径は b と等しいので、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^2+(b-3)^2}-1 &= b \\
a^2+(b-3)^2 &= (b-1)^2 \\
a^2+b-6b+9 &= b^2-2b+1 \\
8b &= a^2+8 \\
b &= \frac{1}{8}a^2+1 \text{ より} \\
y &= \frac{1}{8}a^2+1
\end{aligned}
$$

(2)　4 点 A(2、0、0)、B(0、2、0)、C(0、0、4)、D(2、4、6) があるとき、△ ABC の面積と、四面体 ABCD の体積を求めなさい。

A(2、0、0)、B(0、2、0)、C(0、0、4)、D(2、4、6) より、
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2、2、0) \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2、0、4) \quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0、4、6)$

$$
\begin{aligned}
\triangle \mathrm{ABC}\text{の面積} &= \frac{1}{2}\times |\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times \overrightarrow{\mathrm{AC}}| \\
&= \frac{1}{2}\times\ 4\times\sqrt{1^2+2^2+2^2} \\
&= 2\sqrt{9} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

平面 ABC の方程式は、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ より、

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ と A(2、0、0) を利用して、

$$
\begin{aligned}
2(x-2)+2(y-0)+(z-0) &= 0 \\
2x+2y+z-4 &= 0
\end{aligned}
$$

点 D と平面 ABC の距離は、
$$\mathrm{d} = \frac{|2+2+2\times\ 4+6-4|}{\sqrt{+2^2+2^2}} = \frac{14}{3}$$
よって、体積 $\mathrm{V} = \frac{1}{3}\times\ 6\times\frac{14}{3} = \frac{12}{3}$

4. 次の問 (1)～(2) に答えなさい。

(1)　複素数平面上において、複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき、$w=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2z}$ が表す点の全体の中心と、半径を求めなさい。

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{1}{\sqrt{3}-2z} \\
w\left(\sqrt{3}-2z\right) &= 1 \\
2zw &= \sqrt{3}-1 \\
z &= \frac{2w}{\sqrt{3}-1} \\
\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2w}\right| &= 1 \\
\left|\sqrt{3}-1\right| &= |2w| \\
\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\overline{\sqrt{3}-1}\right) &= (2w)\left(\overline{2w}\right) \\
3w\overline{w}-\sqrt{3}w-\sqrt{3}\overline{w}+1 &= 4w\overline{w} \\
w\overline{w}+\sqrt{3}w+\sqrt{3}\overline{w}-1 &= 0 \\
\left(w+\sqrt{3}\right)\left(\overline{w}+\sqrt{3}\right)-3-1 &= 0 \\
\left(w+\sqrt{3}\right)\left(\overline{w}+\sqrt{3}\right)-4 &= 0 \\
\left|w+\sqrt{3}\right|^2 &= 4 \\
\left|w+\sqrt{3}\right| &= 2
\end{aligned}
$$

よって、点$\sqrt{3}$を中心とする半径 2 の円

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ の値を求めなさい。

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{\frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}} \text{とすると、}\\
\log A &= \frac{1}{n}\log\left\{\frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}\\
&= \frac{1}{n}\log\left\{\frac{n^n(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{n^n(n+1)(n+2)(n+n)}\right\}\\
&= \frac{1}{n}\log\left\{\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right\}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{n}^{k=1}\left\{\log\left(\frac{3+\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}\right)\right\} \text{より、}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{3+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\right) &= \int_0^1\log\left(\frac{3+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\right)dx\\
&= \int_0^1(\log(3+x)-\log(1+x))\,dx\\
&= [(3+x)\log(3+x)-x]_0^1-[(1+x)\log(1+x)-x]_0^1\\
&= 4\log 4-1-3\log 3-(2\log 2-1)\\
&= 8\log 2-3\log 3-2\log 2\\
&= 6\log 2-3\log 3\\
&= \log 64-\log 27\\
&= \frac{\log 64}{\log 27}\\
&= \frac{64}{27}
\end{aligned}
$$

5. 次の問 (1)〜(3) に答えなさい。

(1)　行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい。

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 & -12 \\ 3 & -7 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\
&= -3\begin{vmatrix} 7 & -3 & -12 & 0 \\ 3 & -7 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3\begin{vmatrix} 7 & -3 & -12 \\ 3 & -7 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -12\begin{vmatrix} 7 & -3 & -12 \\ 3 & -7 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -12\begin{vmatrix} 7 & -3 & -5 \\ 3 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -12\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -12(3-35) \\
&= 384
\end{aligned}$$

(2)　t が $(-1 \leq t \leq 2)$ の値をとって変化するとき、媒介変数表示

$$\begin{cases} x = -t^2 + 4 \\ y = -t^2 + t + 2 \end{cases}$$

で表される曲線と x 軸によって囲まれた図形の面積を求めなさい。

$t = 2$ のとき　$x = 0$　　$t = -1$ のとき　$-t^2 + t + 2$ より、

$dx = -2t$

$$\begin{aligned} \int_2^{-1} y \frac{dx}{dt} \cdot dt &= \int_2^{-1} \left(-t^2 + t + 2\right)(-2t) \cdot dt \\ &= \int_2^{-1} \left(2t^3 - 2t^2 - 4t\right) dt \\ &= 2\int_2^{-1} \left(-t^3 + t^2 + 2t\right) dt \\ &= 2\left\{-\frac{1}{4}\left[t^4\right]_2^{-1} + \frac{1}{3}\left[t^3\right]_2^{-1} + \frac{1}{3}\left[t^2\right]_2^{-1}\right\} \\ &= 2\left\{-\frac{1}{4}(16-1) + \frac{1}{3}(8+1) + (4-1)\right\} \\ &= 2\left(-\frac{15}{4} + 3 + 3\right) \\ &= -\frac{15}{2} + 12 \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + 14}{x^2 - 3x - 2} dx$ の値を求めなさい。

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x+1)$　部分分数を用いると、

$$\frac{x^2 + 14}{x^3 - 3x - 2} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} - \frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\frac{dx}{x+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - 5\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} &= -\log 2 - 2\log 2 - 5\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 \\ &= -3\log 2 - \frac{5}{2} \end{aligned}$$